G. Venz

Lösung von Differentialgleichungen mit programmierbaren Taschenrechnern

Verfahren für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Oldenbourg

Lösung von Differentialgleichungen mit programmierbaren Taschenrechnern

Verfahren für gewöhnliche
und partielle Differentialgleichungen

Von Prof. Dr.-Ing. Gerhard Venz

Mit 43 Abbildungen
und 18 Programmablaufplänen

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1978

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Venz, Gerhard:
Lösung von Differentialgleichungen mit programmierbaren Taschenrechnern : Verfahren für gewöhnl. u. partielle Differentialgleichungen . – 1. Aufl. – München, Wien : Oldenbourg, 1978.
ISBN 3-486-21791-7

© 1978 R. Oldenbourg Verlag GmbH. München

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege sowie der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben auch bei auszugsweiser Verwertung vorbehalten. Werden mit schriftlicher Einwilligung des Verlages einzelne Vervielfältigungsstücke für gewerbliche Zwecke hergestellt, ist an den Verlag die nach § 54 Abs. 2 Urh.G. zu zahlende Vergütung zu entrichten, über deren Höhe der Verlag Auskunft gibt.

Gesamtherstellung: Hofmann KG, Augsburg

ISBN 3-486-21791-7

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 7

Einleitung 9

Teil A Gewöhnliche Differentialgleichungen 11

1. Differentialgleichungen mit Anfangswerten 13

1.1 Differentialgleichungen erster Ordnung 13
1.1.1 Beispiel. Oberfläche von Flüssigkeitsströmung 18
1.1.2 Schrittsteuerung und Korrektur 21
1.1.3 Beispiel. Einschalten einer Spule mit Eisenkern 23

1.2 Gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung, Differentialgleichungen zweiter Ordnung 26
1.2.1 Problemstellung und Lösungsweg 26
1.2.2 Beispiel. Einschalten eines Gleichstrom-Motors mit Ankerrückwirkung 32

1.3 Gekoppelte Differentialgleichung zweiter Ordnung, Differentialgleichung vierter Ordnung 36
1.3.1 Problemstellung und Lösungsweg 36
1.3.2 Beispiel. Wasserspiele 38

2. Differentialgleichungen mit Randwerten 43

2.1 Einführung 43
2.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung 44
2.3 Beispiel. Seil mit Schneelast 47
2.4 Differentialgleichung vierter Ordnung 51
2.5 Beispiel. Belasteter Balken auf elastischer Unterlage 56

3. Differentialgleichungen mit Eigenwerten 60

3.1 Einführung 60
3.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung 61
3.3 Beispiel. Schwingende Saite veränderlicher Stärke 63
3.4 Differentialgleichung vierter Ordnung 66
3.5 Beispiel. Knickung eines Stabes unter seinem Eigengewicht 70

Teil B Partielle Differentialgleichungen 73

4. Einführung, Gitterpunktmethode 75

5. Wärmeleitung 79
5.1 Problemstellung und Lösungsweg 79
5.2 Beispiel. Erwärmung der Bremstrommel eines Pkw beim Anhalten . . 82

6. Wellengleichung 87
6.1 Problemstellung und Lösungsweg 87
6.2 Beispiel. Träger mit Rammbär, Kompressionswelle 91

7. Telegraphengleichung, Wanderwelle 96
7.1 Problemstellung und Lösungsweg 96
7.2 Beispiel. Speisung einer am Ende offenen Leitung über eine Induktivität 102

8. Stromverdrängung, Skineffekt 107
8.1 Problemstellung und Lösungsweg 107
8.2 Übergang auf Polarkoordinaten 109
8.3 Beispiel. Stromverdrängung in runden Drähten bei nichtsinusförmiger Spannung 115

9. Wanderwelle mit Stromverdrängung 120
9.1 Problemstellung und Lösungsweg 120
9.2 Beispiel. Einfluß der Stromverdrängung auf das Beispiel 7.2 126

10. Membranschwingung 129
10.1 Problemstellung und Lösungsweg 129
10.2 Übergang auf Polarkoordinaten 132
10.3 Beispiel. Schwingung einer quadratischen Membran 134

11. Poissonsche- und Potentialgleichung 138
11.1 Problemstellung und Lösungsweg 138
11.2 Beispiel. Temperaturverteilung in einem Wohnraum im Winter 142

Literaturverzeichnis 145

Stichwortverzeichnis 146

Vorwort

Kaum ein technisches Gerät hat sich so explosionsartig entwickelt wie der elektronische Taschenrechner. Innerhalb von fünf Jahren wuchs er von einem Investitionsgut für einen kleinen Kreis von Spezialisten zu einem Massenprodukt heran, das, in Kaufhäusern angeboten, einen völlig neuen und bisher unbekannten Markt bedient. Doch ihre volle Ausnutzung und Bedeutung erlangen diese Geräte erst durch die Kenntnis der zugehörigen numerischen Verfahren. Nur langsam folgt hier die notwendige Literatur der allzuraschen Entwicklung. So versucht dieses Buch, eine Lücke kurzfristig zu schließen. Dabei stellte sich die reizvolle Aufgabe, eine Brücke über mehrere Jahrhunderte hinweg zu schlagen, zwischen alten, sehr einfachen Rechensystemen und der neuen, elektronischen Rechentechnik.

Das Buch richtet sich an Schüler der gymnasialen Oberstufe, an Lehrende, Lernende und Praktizierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaften und möchte bei der Lösung ihrer Probleme helfen. Deshalb wechselt bei den Zahlenbeispielen Bekanntes mit weniger Bekanntem und Neuem ab. Die Beispiele wurden auf einem Taschenrechner HP 67 der Firma Hewlett Packard gerechnet. Die Konzeption dieses Rechners eignet sich besonders zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

Um den Text durch theoretische Erörterungen nicht zu belasten, wurden die wichtigsten mathematischen Existenzbedingungen - z.B. Lipschitzbedingung - stillschweigend vorausgesetzt.

Dem Verlag danke ich für seine freundliche Hilfe bei der Arbeit an diesem Buch.

Bremen, im Frühjahr 1978 Gerhard Venz

Einleitung

Differentialgleichungen sind bei der mathematischen Beschreibung von Naturvorgängen die wohl am häufigsten anzutreffende Gleichungsform, weil sich die physikalischen Gesetze am deutlichsten in ihnen ausdrücken lassen. So wird z.B. das Einschalten einer Spule mit der Induktivität L über einen Widerstand R durch die Differentialgleichung

$$u = i \cdot R + L \frac{di}{dt}$$

beschrieben. Um so erfolgreicher sträuben sich aber Differentialgleichungen gegen ihre formelmäßige Auflösung. Ja, das Auffinden einer analytischen Lösung mit Hilfe bekannter Funktionen, wie x^n, $\ln x$ oder $\sin x$, gehört zu den seltenen Ausnahmen. Hier helfen nur zeichnerische oder numerische Näherungslösungen weiter, wobei den numerischen Verfahren der Vorzug zu geben ist, wegen ihrer Vielseitigkeit und weil die Lösung der Differentialgleichung mit gewünschter Genauigkeit angegeben werden kann.
Die numerischen Verfahren beinhalten aber einen großen Rechenaufwand. Erst durch die Erstellung von Rechenautomaten, mit der Möglichkeit, sehr viele Rechenoperationen in kürzester Zeit auszuführen, wurden die numerischen Verfahren für den Praktiker interessant. Mit der Weiterentwicklung zu programmierbaren Rechnern im Taschenformat eröffnet sich nunmehr dem Interessierten die Möglichkeit, diesen reizvollen Zweig der Naturbeschreibung durch

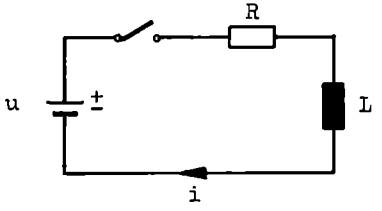


Abb. 1 Einschalten einer Spule

die Lösung vorliegender Differentialgleichungen auch außerhalb von Rechenzentren kennenzulernen.
Man unterscheidet gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen kommen nur Ableitungen (Differentialquotienten) nach einer Veränderlichen vor, z.B. der Zeit t oder einer Auslenkung x. Bei partiellen Differentialgleichungen finden sich dagegen Ableitungen nach mehreren Veränderlichen. Für beide Arten werden numerische Verfahren beschrieben, die sich für programmierbare Taschenrechner mit ihrer beschränkten Anzahl von Speicherplätzen besonders gut eignen. Die untere Grenze des notwendigen Programmierumfanges liegt bei etwa 250 Programmschritten (ROM Read Only Memory) und 25 Datenspeichern (RAM Random Access Memory); außerdem müssen indirektes Adressieren, Programmverzweigungen (Decision) nach Vergleichsoperationen und Unterprogramme (Subroutine) möglich sein.

Teil A

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Differentialgleichungen mit Anfangswerten

1.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x und y und der ersten Ableitung y' nach x. Sie sei umstellbar in die explizite Form

$$y' = f(x,y) \ .$$

Gesucht wird die Kurve y(x), die die Differentialgleichung erfüllt und durch einen vorgegebenen Anfangspunkt x_o , y_o geht. Diese Kurve soll punktweise, jeweils im Abstand einer in x-Richtung gewählten Schrittweite h errechnet werden (Abb.2).
Aus der Vielzahl der bekannten numerischen Lösungswege eignet sich das Verfahren nach RUNGE und KUTTA für programmierbare Taschenrechner besonders gut, aus folgenden Gründen:

Es ist zuverlässig, arbeitet rein mechanisch und ist einfach zu programmieren.
Es arbeitet ohne Iteration und Anlaufrechnung.
Es zeichnet sich bei richtiger Schrittwahl h durch eine hohe Genauigkeit aus.
Es erlaubt im Bedarfsfall das Abändern der Schrittweite h nach jedem berechneten Punkt der Kurve y(x).

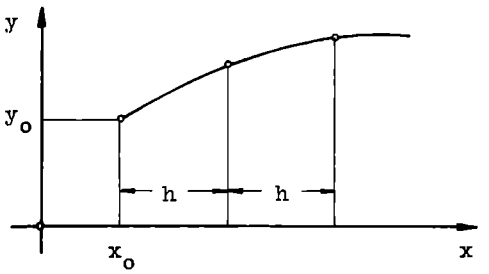


Abb. 2 Punktweise Berechnung einer Kurve

Es gestattet dadurch, bei geringem Mehraufwand, eine automatische Steuerung zur richtigen Schrittweite hin.
Es läßt ohne weiteres die Erweiterung auf Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung zu.

Auf die mathematische Begründung dieses Verfahrens wird hier verzichtet, weil sie einen erheblichen Aufwand erfordert. Man kann sie aber nachlesen, z.B. in dem Buch von C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924.

Beschreibung des Verfahrens

Das Verfahren nach RUNGE-KUTTA beruht auf einem dreimaligen Sich-Vortasten längs verschiedener Parabelbögen, beginnend mit dem Anfangspunkt x_o , y_o , und zwar zweimal um $\frac{h}{2}$ bis zur Schrittmitte und einmal um h bis zum Schrittende (Abb.3). Hierbei werden an den Schrittstellen s_I vier verschiedene Zuwächse k_I (I = 1 bis 4) in y-Richtung berechnet, aus denen ein Mittelwert k gebildet wird. Mit h und k findet man das Wertepaar des nächsten Punktes

$$x_1 = x_o + h \qquad\qquad y_1 = y_o + k \; .$$

Dieses dient als neuer Anfangspunkt für die nächste Schrittberechnung usw.

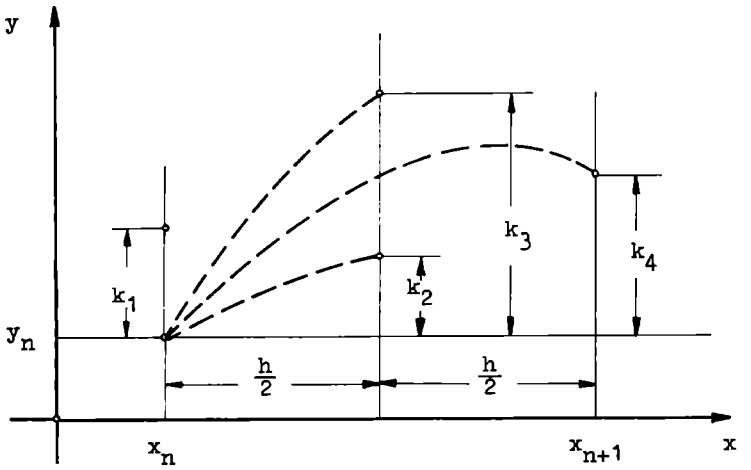


Abb. 3 RUNGE-KUTTA-Verfahren

Das Gleichungssystem für dieses Vorgehen wurde für die Zahlenrechnung auf eine besonders günstige Form gebracht und schreibt sich an einer beliebigen Stelle x_n , y_n :

Zuwachs

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \tfrac{h}{2}\cdot f(s_1) \quad \text{mit} \quad & s_1&: \; x_n \; ; \; y_n \\
k_2 &= \tfrac{h}{2}\cdot f(s_2) & s_2&: \; x_n + \tfrac{h}{2} \; ; \; y_n + k_1 \\
k_3 &= \tfrac{h}{2}\cdot f(s_3) & s_3&: \; x_n + \tfrac{h}{2} \; ; \; y_n + k_2 \\
k_4 &= \tfrac{h}{2}\cdot f(s_4) & s_4&: \; x_n + h \; ; \; y_n + 2\,k_3 \; ,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Mittelwert

$$k = \frac{1}{3}\cdot(\, k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4 \,) \; , \tag{1.2}$$

Wertepaar des nächsten Punktes

$$x_{n+1} = x_n + h \qquad\qquad y_{n+1} = y_n + k \; . \tag{1.3}$$

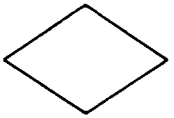
<u>Programmablaufplan</u>

Wie wir gesehen haben, besteht das RUNGE-KUTTA-Verfahren aus einer Reihe von Rechenoperationen und logischen Entscheidungen, die das Wertepaar x_n , y_n eines Punktes der Lösungskurve mit dem Wertepaar x_{n+1} , y_{n+1} des nächsten Punktes verknüpft. Ein wertvolles Hilfsmittel für die Umsetzung dieser einzelnen Rechenschritte in das Programm eines Taschenrechners ist der Programmablaufplan oder das Flußdiagramm. In ihm wird der Lösungsablauf graphisch dargestellt. So zeigt der Programmablaufplan insbesondere die

Ein- und Ausgabe von Zahlen,
Rechenoperationen,
logischen Entscheidungen,

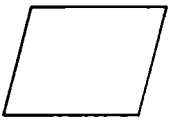
und zwar in der Reihenfolge und Verknüpfung, in der sie bei der Zahlenrechnung ablaufen müssen. An Hand eines Flußdiagrammes, läßt sich das Programm für einen Taschenrechner Schritt für Schritt erstellen.
Für die graphische Darstellung des Lösungsablaufes wurden im DIN-Blatt 66001 verschiedene Symbole vereinbart, von denen neun in diesem Buch verwendet werden:

Das Rechteck hebt die Stellen hervor, an denen Rechenoperationen ausgeführt werden.



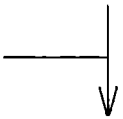
Ein Rhombus kennzeichnet eine Verzweigungsstelle.

Dieses Zeichen bedeutet das Abarbeiten eines Unterprogrammes, ehe im Hauptprogramm weitergegangen wird.



Stellen, an denen Daten ein- oder ausgegeben werden, kennzeichnet das Parallelogramm.

Der Strich bedeutet eine Ablauflinie. Vorzugsrichtung ist von oben nach unten oder von links nach rechts.



So wird eine Zusammenführung gezeichnet. Zwei sich kreuzende Ablauflinien bedeuten keine Zusammenführung.

Der Kreis steht für eine Übergangsstelle. Zusammengehörige Übergangsstellen müssen gleiche Bezeichnungen haben.

Mit diesem Zeichen werden Anfang und Ende, auch Zwischenhalte einer vollständigen Rechenarbeit markiert.

Dieses Zeichen wird für Bemerkungen an irgendein Symbol angefügt.

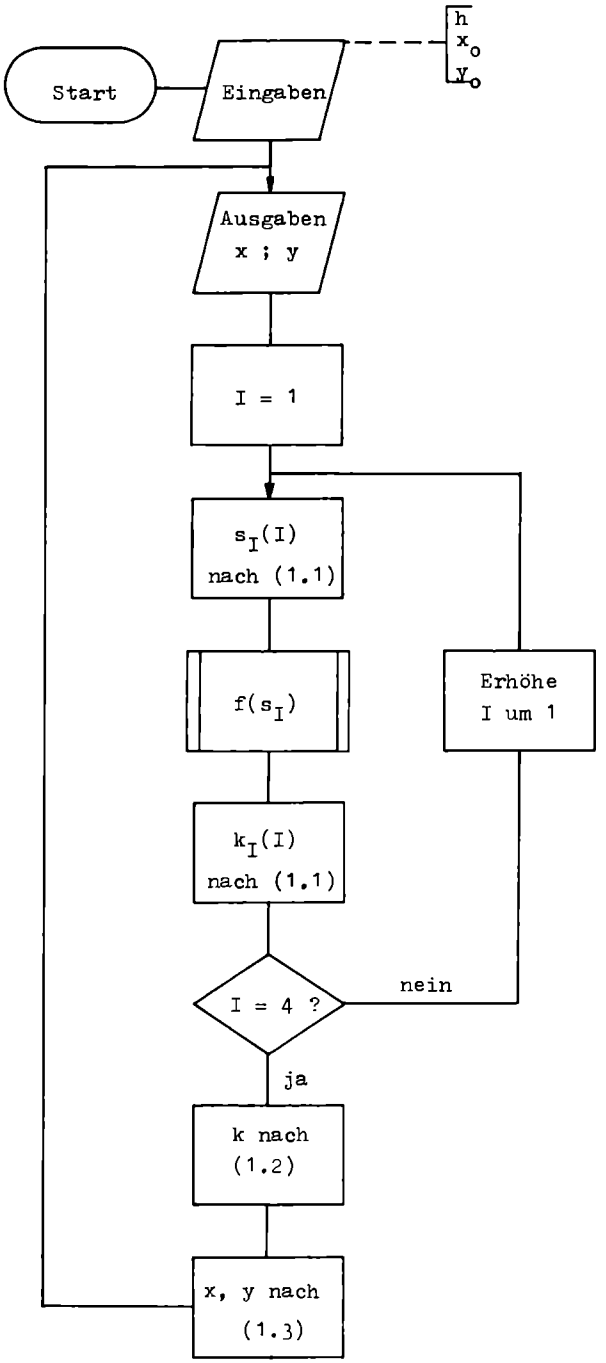


Abb. 4 Differentialgleichung erster Ordnung

Den Programmablaufplan für eine Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswerten zeigt die Abb.4. Um mit dem gleichen Programm die unterschiedlichsten Differentialgleichungen

$$y' = f(x,y)$$

lösen zu können, ist im Ablaufplan für die Funktion f(x,y) ein Unterprogramm vorgesehen. Ist das Hauptprogramm einmal erstellt, so genügt es, zur Lösung einer vorliegenden Differentialgleichung die Funktion f(x,y) als Unterprogramm zu schreiben und das Hauptprogramm mit den Anfangswerten x_0 , y_0 zu starten.

1.1.1 Beispiel. Oberfläche von Flüssigkeitsströmung

Die Oberfläche einer gestauten Wasserströmung im Längsschnitt (Abb.5) wird durch die Differentialgleichung

$$y' = -\gamma\left[1 - \left(\frac{H}{y}\right)^4\right]$$

beschrieben, sofern ein seichtes Bett von parabolischem Querschnitt vorliegt. Gesucht wird die Wasserhöhe y im Abstand von der Staumauer x für die folgenden Zahlenwerte:

γ = 0,0873 kleines Gefälle im Bogenmaß
H = 1 m Wasserhöhe in größerer Entfernung x
y_0 = 1,5 m für x_0 = 0 m Anfangswerte
h = 1 m Schrittweite für das RUNGE-KUTTA-Verfahren.

Ergebnis:

x m	y m
0	1,500
1	1,432
2	1,367
3	1,307
4	1,253
5	1,204
6	1,161
7	1,125
8	1,095
9	1,072
10	1,053

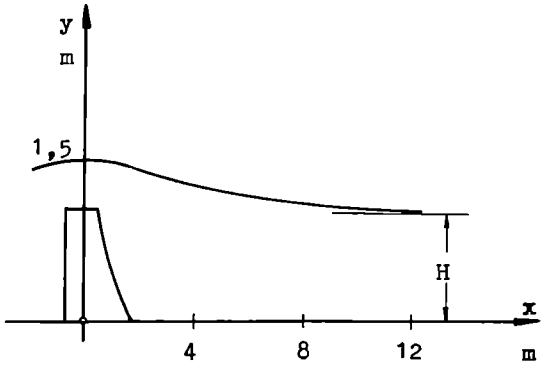


Abb. 5 Flüssigkeitsströmung

Die Zahlen wurden auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm gerechnet:

Hauptprogramm

```
LBL A
RCL 1
STO A
-X-
RCL 2
STO B
-X-
GSB B
RCL 0
x
STO 3
GSB 0
GSB 0
2
x
RCL 0
STO+1
R↓
GSB 0
STO-3
3
STO:3
RCL 0
STO+1
RCL 3
STO+2
GTO A

LBL 0
RCL 2
+
STO B
RCL 1
RCL 0
+
STO A
GSB B
RCL 0
x
STO+3
STO+3
RTN
```

Unterprogramm f(x,y)

```
LBL B
RCL 6
RCL B
:
4
y^x
1
-
RCL 5
x
RTN
```

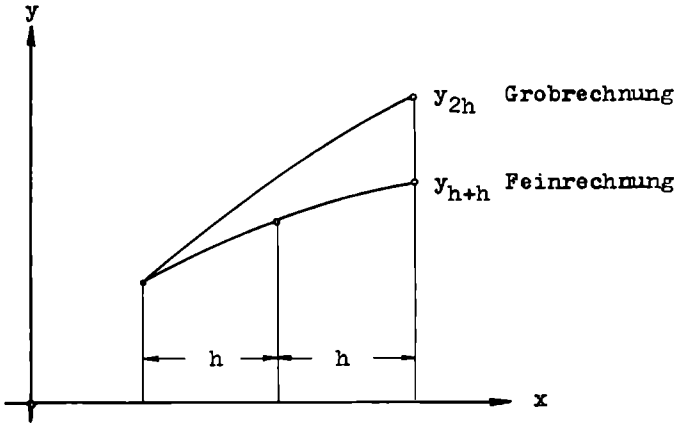
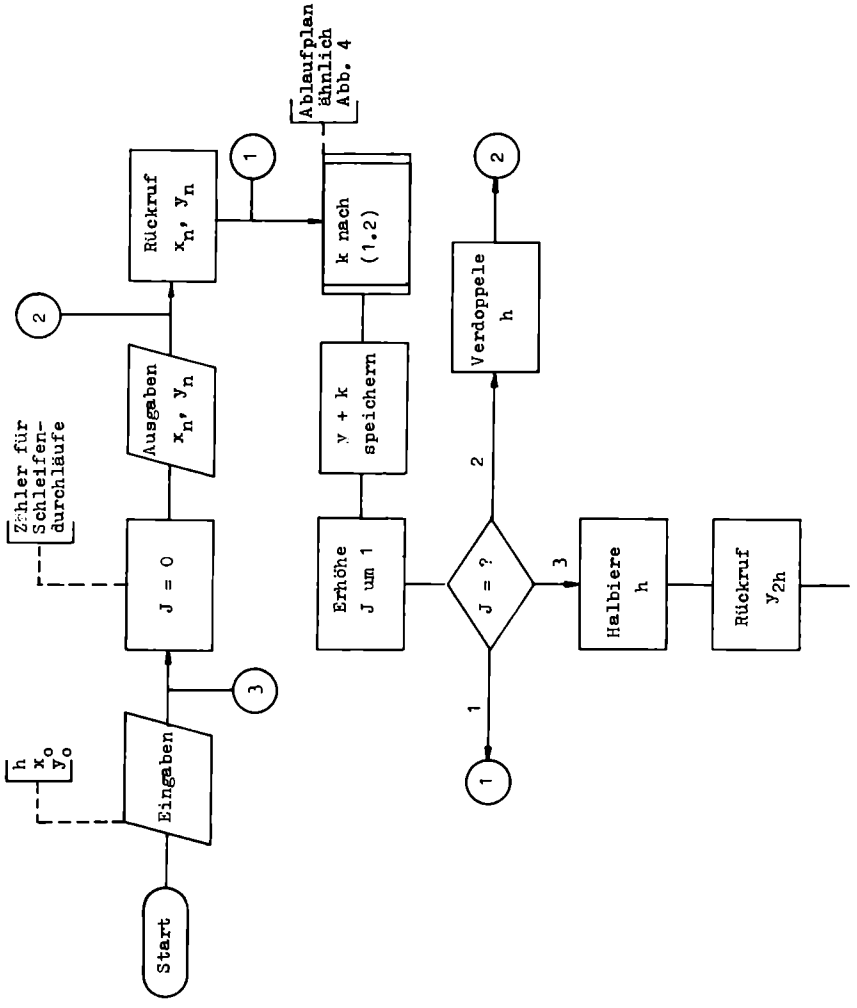


Abb. 6 Fehlerabschätzung



Speicherplan

		A	B	C	D	E		
	Wertepaar	x	y	frei	frei	frei		
0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{h}{2}$	x_0	y_0	belegt	frei	γ	H	frei	frei

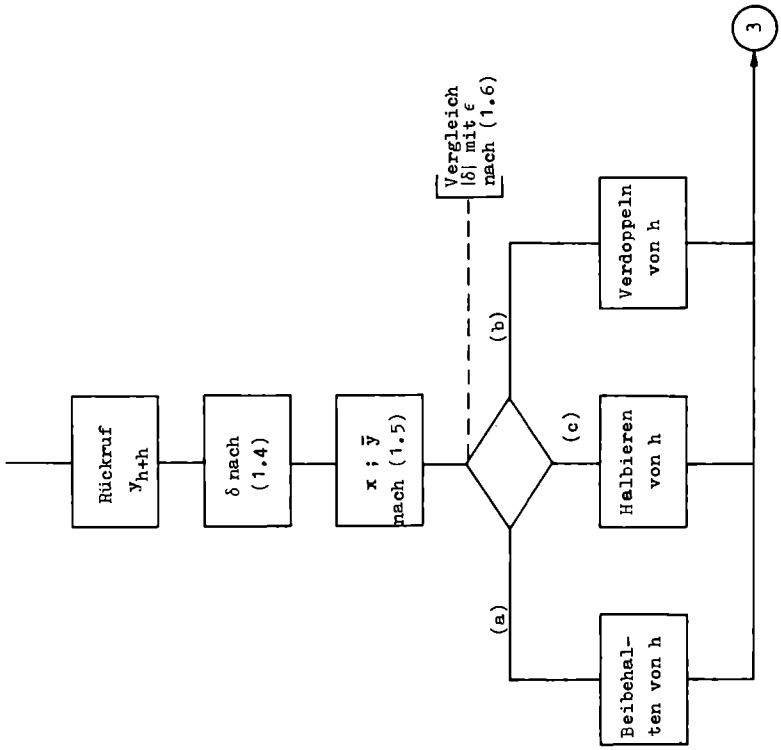


Abb. 7 Differentialgleichung erster Ordnung mit Korrektur und Schrittsteuerung

1.1.2 Schrittsteuerung und Korrektur

Das RUNGE-KUTTA-Verfahren ist hinsichtlich seiner Genauigkeit ein Verfahren vierter Ordnung, d.h. der Fehler ist von der Ordnung h^5. Bei hinreichend kleiner Schrittweite wird daher der Benutzer durch eine hohe Genauigkeit belohnt. Umgekehrt verhält es sich

aber bei zu großer Schrittweite. Die richtige Schrittbemessung ist bei diesem Verfahren von entscheidender Bedeutung. Hier liegt eine Quelle der Unsicherheit, zumal sich eine Fehlerrechnung nur mit großer Schwierigkeit ausführen läßt.
Dagegen gibt es für ein angenähertes Abschätzen des Fehlers folgenden einfachen Weg:
Die Rechnung wird mit doppelter Schrittweite 2h wiederholt und das Ergebnis y_{2h} dieser groben Rechnung mit der zuvor durchgeführten Feinrechnung y_{h+h} verglichen. Dann läßt sich angenähert sagen, daß der Fehler bei der Schrittverdoppelung auf den $2^5 = 32$-fachen Wert angestiegen ist. Da gleichzeitig zum Durchlaufen von 2h zwei Schritte h + h der Feinrechnung nötig sind, wird sich hier der Fehler nahezu verdoppelt haben. So kann man den Fehler der Grobrechnung auf das 16fache der Feinrechnung schätzen. Die Differenz zwischen Grob- und Feinrechnung wird somit etwa das 15fache des Fehlers in der Feinrechnung betragen (Abb.6).
Diese Fehlerabschätzung läßt sich sowohl zur automatischen Schrittsteuerung als auch zur Korrektur der Feinrechnung heranziehen.

Korrektur der Feinrechnung

$$\delta = \frac{1}{15} \cdot (y_{h+h} - y_{2h}). \tag{1.4}$$

Korrigierter Wert

$$\bar{y} = y_{h+h} + \delta \tag{1.5}$$

für $\quad x = x_n + h + h$.

Nach der Wahl einer Genauigkeitsschranke ϵ, z.B. vier Stellen nach dem Komma, hat sich für die Schrittsteuerung folgende Festlegung als brauchbar herausgestellt /9/ :

$$\begin{aligned} \frac{10\,\epsilon}{66} &\leqslant |\delta| && \text{(a) beibehalten von h} \\ \frac{10\,\epsilon}{66} &> |\delta| && \text{(b) verdoppeln von h} \\ 10\,\epsilon &\leqslant |\delta| && \text{(c) halbieren von h .} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Im Programmablaufplan (Abb.7) für eine Rechnung mit Schrittsteuerung und Korrektur ist zur Vereinfachung die Berechnung des Mittelwertes k als Unterprogramm gezeichnet.

1.1.3 Beispiel. Einschalten einer Spule mit Eisenkern

Bei einer Spule mit Eisenkern hängt die Induktivität L vom Sättigungsgrad des magnetischen Flusses Φ ab, der vom Strom i bestimmt wird. Dann erhält die Differentialgleichung zur Abb. 1 die Form

$$u = i \cdot R + N \cdot \frac{d}{dt} \Phi(i) \quad . \qquad N \text{ Windungszahl der Spule}$$

Zur analytischen Nachbildung der Magnetisierungskurve Φ in einem magnetischen Kreis aus Eisen und Luftspalt ist die Funktion

$$F(z) = \coth(z) - \frac{1}{z}$$

gut geeignet, deren Kurvenverlauf die Abb. 8 zeigt. Für die weitere Rechnung wird auch noch ihre Ableitung benötigt

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sinh^2(z)}$$

für $z = 0$ $\frac{dF}{dz} = 0{,}3326$.

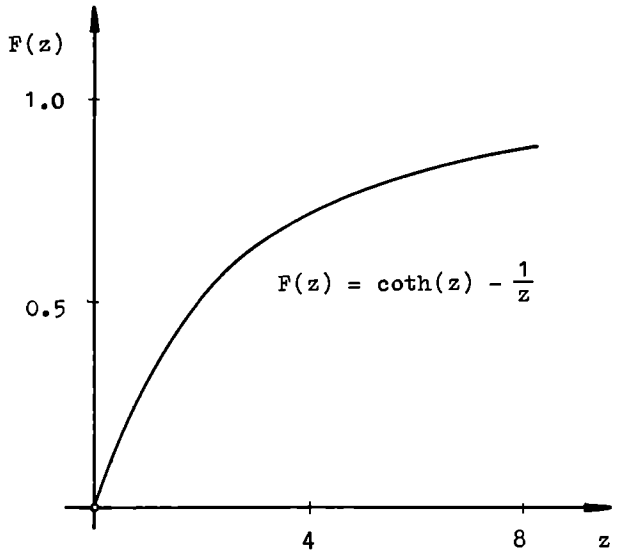


Abb. 8 Nachbildung der Eisen-Magnetisierungskurve

Mit $\Phi = \Phi_0 \cdot F(z)$ und $z = \alpha \cdot i$ erhält man eine veränderliche Induktivität

$$L(i) = N\,\Phi_0\,\alpha\,\frac{dF}{dz} \quad ,$$

mit der sich die Differentialgleichung schreibt

$$u = i \cdot R + L(i) \cdot \frac{di}{dt} \quad .$$

Umgestellt für das RUNGE-KUTTA-Verfahren

$$\frac{di}{dt} = \frac{u - i\,R}{L(i)} \quad .$$

Die Induktivität L(i) beinhaltet selber eine Funktion, die nicht ganz einfach aufgebaut ist. Für die Rechnung nach RUNGE-KUTTA bedeuten nichtkonstante Faktoren aber keine zusätzliche Erschwernis.

Die Lösung wird für folgende Zahlenwerte gesucht:

$$\frac{U}{R} = 1\ \mathrm{A}\ ; \quad \frac{N\,\Phi_0\,\alpha}{R} \cdot 0{,}3326 = 5\ \mathrm{s}\ ; \quad \alpha = 0\ \frac{1}{\mathrm{A}} \ \text{und} \ \alpha = 5\ \frac{1}{\mathrm{A}}\ ;$$

$i_0 = 0$ A für $t_0 = 0$ s Anfangswerte; h = 0,5 s erste Schrittweite.

Ergebnis:

$\alpha = 0$		$\alpha = 5$	
t	i	t	i
s	A	s	A
0	0,00	0	0,00
1	0,18	1	0,19
3	0,45	3	0,65
7	0,75	5	0,97
11	0,89	6	0,99
		7	1,00

Aus den Zahlenreihen für die Zeit t ist die automatische Schrittsteuerung deutlich ablesbar. Aus der Abb. 9 ist ersichtlich, daß der Einschaltstrom i bei höherem Sättigungsgrad schneller seinen Endwert erreicht.
Die Zahlen wurden auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm gerechnet:

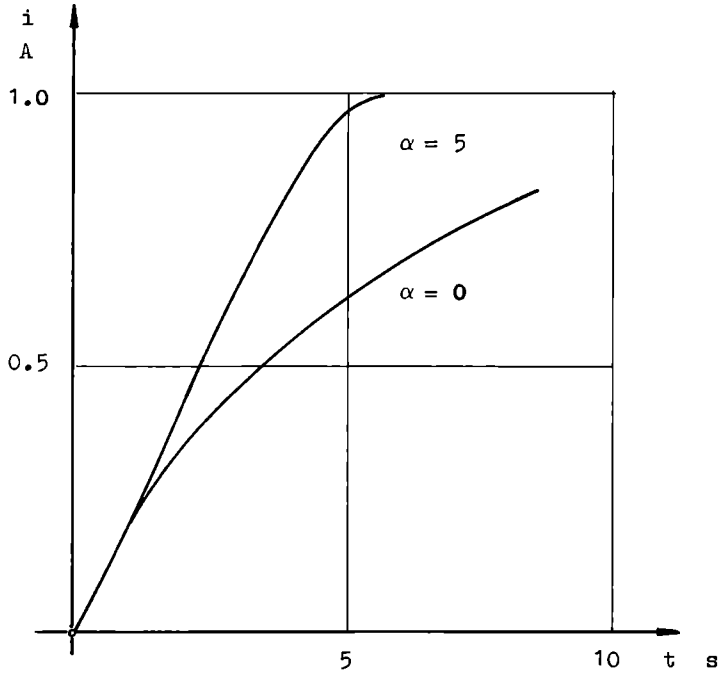


Abb. 9 Einschaltstrom einer Spule mit Eisenkern

Hauptprogramm

```
LBL A
3
ST I
RCL 1
STO A
-X-
RCL 2
STO B
STO 4
-X-
GTO 2
LBL 1
RCL 0
2
x
STO-1
STO-1
STO 0
RCL 4
RCL 2
STO 4
R↓
STO 2
LBL 2
RCL 1
STO A
RCL 2
STO B
GSB B
RCL 0
x
STO 3
GSB 0
GSB 0
2
x
RCL 0
STO+1
R↓
GSB 0
STO-3
3
STO:3
RCL 0
STO+1
RCL 3
STO+2
DSZ
GTO(i)
RCL 2
RCL 4
STO 2
-
1
5
:
STO-2
ABS
EEX
CHS
3
x≤y
GTO 3
6
6
:
x>y
GTO A
2
STO:0
GTO A
LBL 0
RCL 2
+
STO B
RCL 1
RCL 0
+
STO A
GSB B
RCL 0
x
STO+3
STO+3
RTN
LBL 3
4
STO:0
GTO A
```

Unterprogramm f(x,y)

```
LBL B
RAD
RCL B
RCL 5
x
x=0
GTO b
ENTER
1/x
x²
x⇄y
eˣ
ENTER
1/x
-
2
:
x²
1/x
-
RCL 7
x
RCL 6
:
1/x
RCL 8
RCL B
-
x
RTN
LBL b
RCL 8
RCL B
-
RCL 7
:
RTN
```

Speicherplan

	A	B	C	D	E
Wertepaar	x	y	frei	frei	frei

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	x_0	y_0	belegt	belegt	α	0,3326	5 s	$\frac{U}{R}$	frei

10 bis 19
frei

1.2 Gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung, Differentialgleichungen zweiter Ordnung

1.2.1 Problemstellung und Lösungsweg

Häufig wird ein physikalischer Vorgang nicht durch eine einzige Differentialgleichung beschrieben, sondern durch ein System von zwei oder mehreren Differentialgleichungen, die miteinander zusammenhängen, gekoppelt sind. Ein solches System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung hat die Form

$$y' = f(x,y,z)$$
$$z' = g(x,y,z) \ .$$

Für die beiden Gleichungen werden jetzt zwei Anfangsbedingungen benötigt: $y = y_0$ und $z = z_0$ für $x = x_0$. Gesucht werden die Kurven $y(x)$ und $z(x)$, die dem Differentialgleichungssystem genügen und außerdem die beiden Anfangsbedingungen erfüllen. Ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung kann in einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zusammengefaßt werden, in der neben der ersten Ableitung auch noch die zweite vorkommt. Der höchste Differentialquotient bestimmt immer die Ordnung einer Differentialgleichung. Umgekehrt läßt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen. Durch die einfache Substitution $y' = z$ geht nämlich eine Dif-

ferentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = f(x,y,y')$ über in die beiden Gleichungen

$$y' = z$$
$$z' = f(x,y,z) \ .$$

Es genügt also, das Lösungsverfahren für zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung zu kennen.

Beschreibung des Verfahrens

Zur Lösung der Doppelgleichung wird das Verfahren nach RUNGE-KUTTA jetzt aus zwei parallel verlaufenden, gekoppelten Rechnungsgängen aufgebaut. Es werden also je vier Zuwächse, k_I und l_I ($I = 1$ bis 4), in y- und in z-Richtung errechnet und daraus zwei Mittelwerte k und l bestimmt. Das Gleichungssystem an einer beliebigen Stelle x_n , y_n , z_n schreibt sich:

Zuwachs

$$k_1 = \frac{h}{2}\cdot f(s_1) \qquad l_1 = \frac{h}{2}\cdot g(s_1)$$

$$s_1: \quad x_n \ ; \quad y_n \ ; \quad z_n$$

$$k_2 = \frac{h}{2}\cdot f(s_2) \qquad l_2 = \frac{h}{2}\cdot g(s_2)$$

$$s_2: \quad x_n + \frac{h}{2} \ ; \quad y_n + k_1 \ ; \quad z_n + l_1 \tag{1.7}$$

$$k_3 = \frac{h}{2}\cdot f(s_3) \qquad l_3 = \frac{h}{2}\cdot g(s_3)$$

$$s_3: \quad x_n + \frac{h}{2} \ ; \quad y_n + k_2 \ ; \quad z_n + l_2$$

$$k_4 = \frac{h}{2}\cdot f(s_4) \qquad l_4 = \frac{h}{2}\cdot g(s_4)$$

$$s_4: \quad x_n + h \ ; \quad y_n + 2\cdot k_3 \ ; \quad z_n + 2\cdot l_3 \quad ,$$

Mittelwert

$$k = \frac{1}{3}\cdot(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4) \tag{1.8}$$

$$l = \frac{1}{3}\cdot(l_1 + 2\cdot l_2 + 2\cdot l_3 + l_4) \quad ,$$

die Wertepaare für den nächsten Punkt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + k \\ z_{n+1} &= z_n + l \end{aligned} \tag{1.9}$$

dienen als Anfang für die nächste Schrittberechnung usw.

Schrittsteuerung und Korrektur

Auch für Systeme von Differentialgleichungen bleibt beim RUNGE-KUTTA-Verfahren die richtige Schrittbemessung von entscheidender Bedeutung. Der in 1.1.2 beschriebene Weg einer näherungsweisen Fehlerabschätzung ist auch hier gangbar:

Korrektur der Feinrechnung für $x = x_n + h + h$

in y-Richtung

$$\delta_y = \frac{1}{15}\cdot(y_{h+h} - y_{2h}), \tag{1.10}$$

in z-Richtung

$$\delta_z = \frac{1}{15}\cdot(z_{h+h} - z_{2h}) \quad ,$$

korrigierte Werte

$$\bar{y} = y_{h+h} + \delta_y \tag{1.11}$$

$$\bar{z} = z_{h+h} + \delta_z \quad .$$

Zur Schrittsteuerung wird der größere Betrag der beiden Korrekturwerte herangezogen

$$\delta = \mathrm{Max}(|\delta_y| \ ,|\delta_z|)$$

und mit ihm nach (1.6) verfahren.

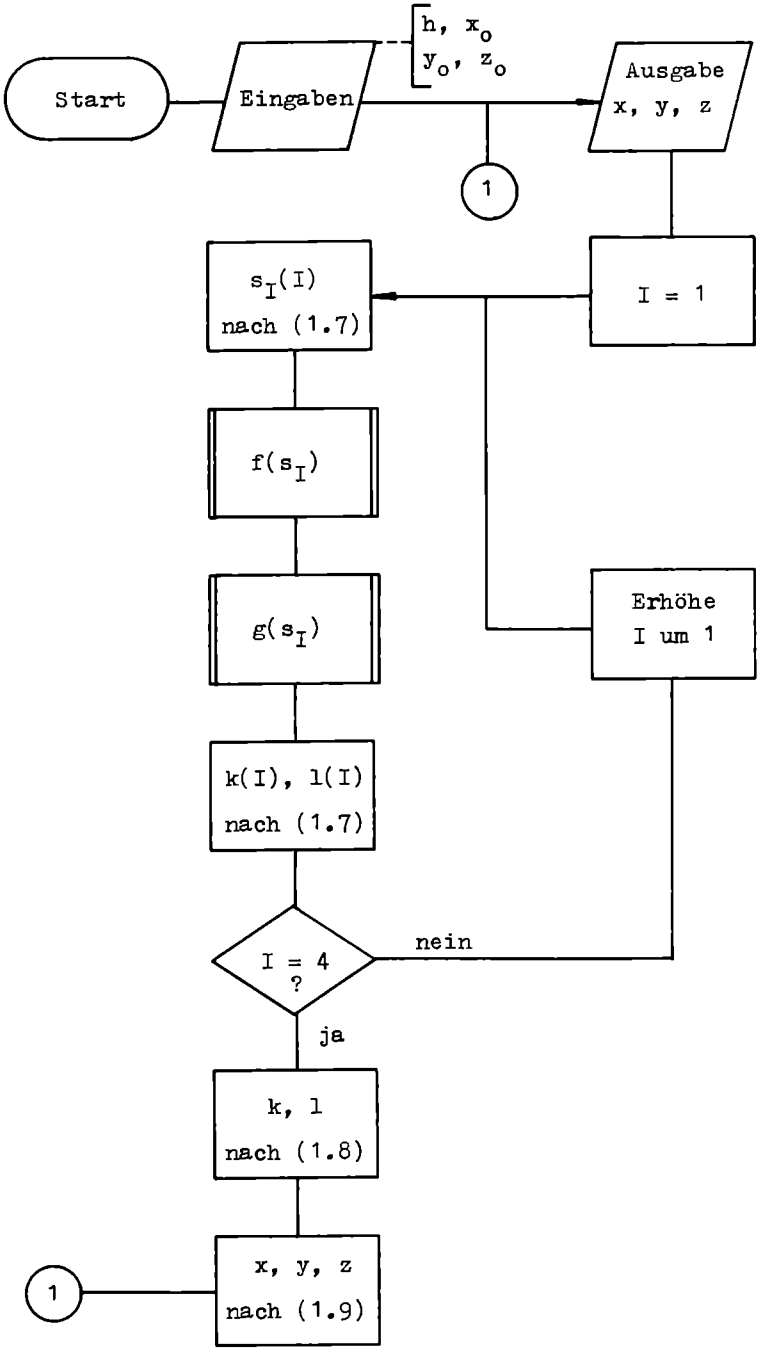
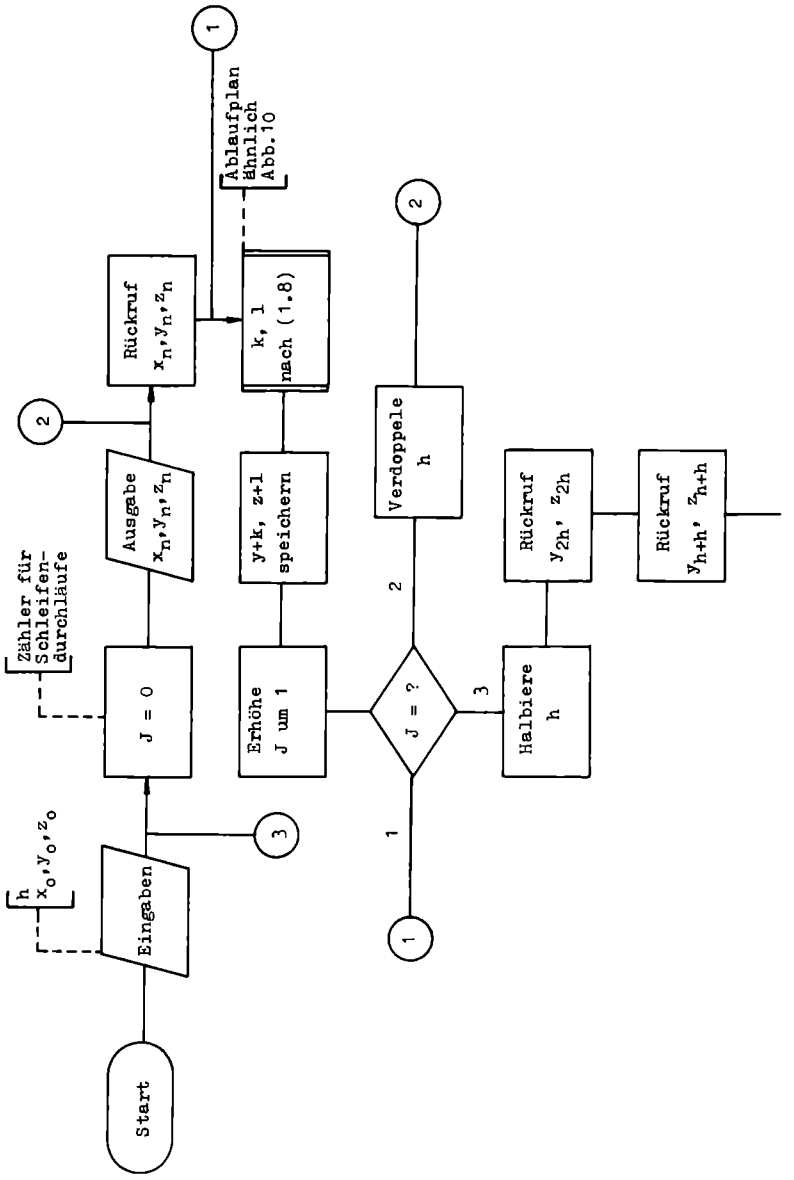


Abb. 10 Differentialgleichung zweiter Ordnung


Start
Eingaben
h
x_0, y_0, z_0
J = 0
Zähler für Schleifen-durchläufe
Ausgabe
x_n, y_n, z_n
Rückruf
x_n, y_n, z_n
1
2
3
k, 1
nach (1.8)
Ablaufplan ähnlich Abb.10
y+k, z+1
speichern
Erhöhe
J um 1
J = ?
1
2
3
Verdoppele
h
Halbiere
h
Rückruf
y_{2h}, z_{2h}
Rückruf
y_{h+h}, z_{h+h}

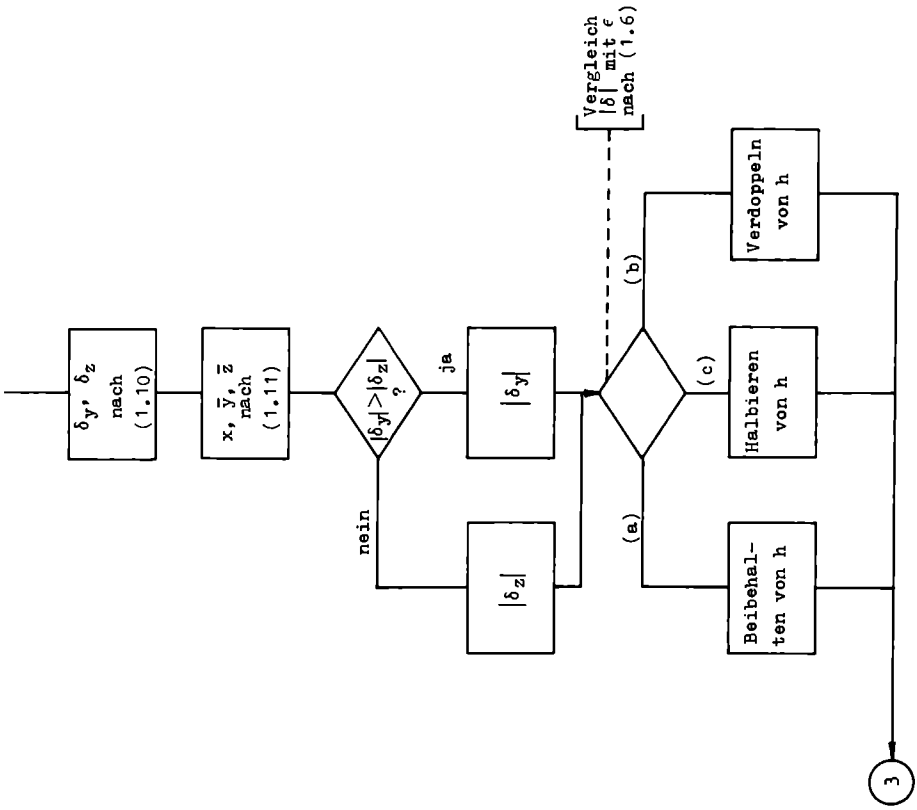


Abb. 11 Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Korrektur und Schrittsteuerung

Programmablaufplan

Der Ablaufplan für zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ist ähnlich Abb.4 aufgebaut. Die beiden Funktionen f(x,y,z) und g(x,y,z) werden als Unterprogramme in das Hauptprogramm eingefügt, so daß das Hauptprogramm für Differentialgleichungen der unterschiedlichsten Form gilt (Abb.10). Der Ablaufplan mit Korrektur und Schrittsteuerung nimmt dann zur Vereinfachung hierauf Bezug (Abb.11).

1.2.2 Beispiel. Einschalten eines Gleichstrom-Motors mit Ankerrückwirkung

Am Beispiel 1.1.3 wurde der Einfluß der Eisensättigung auf den Einschaltstrom einer Spule mit Eisenkern gezeigt. Nun soll der Grobanlauf (Strom i und Drehzahl n) eines fremderregten Gleichstrom-Motors (Abb.12) gerechnet werden. Sobald durch den Anker der Maschine ein Strom i fließt, tritt, wegen der gekrümmten Eisenkennlinie, eine Schwächung des magnetischen Hauptfeldes ein, die sogenannte Ankerrückwirkung [1]. Diese hat die Form der Abb.13 und kann durch die Funktion

$$c = \frac{a}{1 + b \cdot i^2}$$

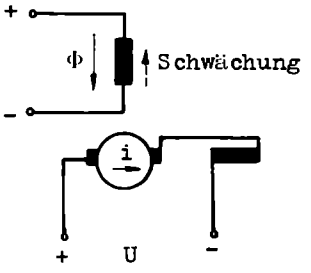


Abb. 12 Schaltbild eines fremderregten Gleichstrom-Motors

1) Nürnberg, Die Ankerrückwirkung der Gleichstrom-Maschine, Jahrbuch der AEG Forschung 1941, Bd.8

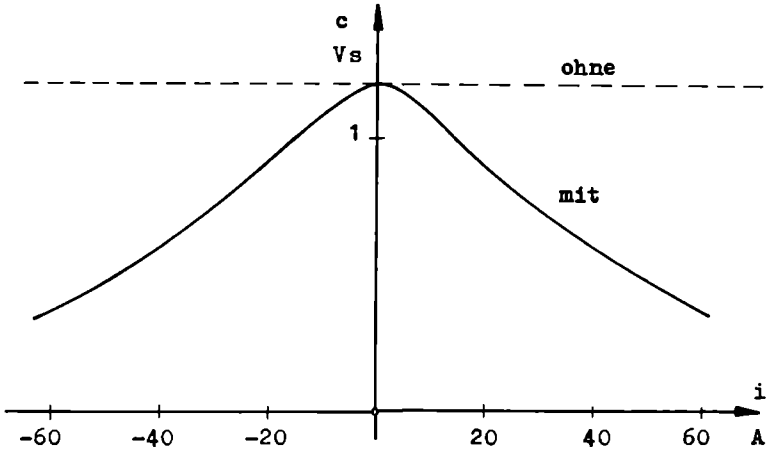


Abb. 13 Feldschwächung durch Ankerrückwirkung

approximiert werden. Die weitere mathematische Betrachtung führt auf eine "mechanische" und eine "elektrische" Differentialgleichung erster Ordnung, die miteinander gekoppelt sind:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = c \cdot i$$

$$L \frac{di}{dt} = U - R \cdot i - c \cdot \omega \quad .$$

Die Berechnung von

Strom i A und

Drehzahl $n = \frac{30}{\pi} \cdot \omega \quad \frac{U}{min}$

erfolgt für eine 2 kW - Maschine mit den Zahlenwerten

Spannung	U	=	225	V
Ankerwiderstand	R	=	3,8	Ω
Ankerinduktivität	L	=	0,18	H
Trägheitsmoment	I	=	0,05	Ws^3
Leerlaufdrehzahl	n_o	=	$\frac{30 \cdot U}{\pi \cdot c_o}$ = 1790	$\frac{U}{min}$
	c	=	$\frac{1,2}{1 + \left(\frac{i}{40}\right)^2}$	Vs

Anfangswerte $\omega = 0$ und $i = 0$ für $t = 0$

erste Schrittweite $h = 0,005$ s .

Das Ergebnis zeigt Abb.14. Zwischen dem Anlauf mit und dem Anlauf ohne Ankerrückwirkung ist ein deutlicher Unterschied feststellbar.
Gerechnet wurde mit Korrektur und Schrittsteuerung auf einem HP 67 nach dem folgenden Programm

Hauptprogramm

```
LBL A
3
ST I
RCL 1
STO A
-X-
RCL 2
STO B
STO 6
RCL 9
x
-X-
RCL 3
STO C
STO 7
-X-
GTO 2
LBL 1
RCL 0
2
x
STO-1
STO-1
STO 0
RCL 6
RCL 2
STO 6
R↓
STO 2
RCL 7
RCL 3
STO 7
R↓
STO 3
LBL 2
RCL 1
STO A
RCL 2
STO B
RCL 3
STO C
GSB B
RCL 0
x
STO 4
STO 8
GSB C
RCL 0
x
STO 5
GSB 0
GSB 0
2
STOx8
x
RCL 0
STO+1
R
GSB 0
STO-5
RCL 8
STO-4
3
STO:4
STO:5
RCL 0
STO+1
RCL 4
STO+2
RCL 5
STO+3
DSZ
GTO(i)
RCL 2
RCL 6
STO 2
-
1
5
:
STO-2
ABS
RCL 3
RCL 7
STO 3
-
1
5
:
STO-3
ABS
x≤y
x⇄y
EEX
CHS
3
x≤y
GTO 3
6
6
:
x>y
GTO A
2
STO:0
GTO A
LBL 0
RCL 3
+
STO C
RCL 8
RCL 2
+
STO B
RCL 1
RCL 0
+
STO A
GSB B
RCL 0
x
STO 8
STO+4
STO+4
GSB C
RCL 0
x
STO+5
STO+5
RTN
LBL 3
4
STO:0
GTO A
```

Unterprogramme

f(x,y,z) mit Ankerrückwirkung

```
LBL B
P⇄S
1
.
2
RCL C
4
0
:
x²
1
+
:
STO D
RCL C
x
RCL 3
:
P⇄S
RTN
```

f(x,y,z) ohne Ankerrückwirkung

```
LBL B
P⇄S
RCL D
RCL C
x
RCL 3
:
P⇄S
RTN
```

g(x,y,z)

```
LBL C
P⇄S
RCL 0
RCL C
RCL 1
x
-
RCL D
RCL B
x
-
RCL 2
:
P⇄S
RTN
```

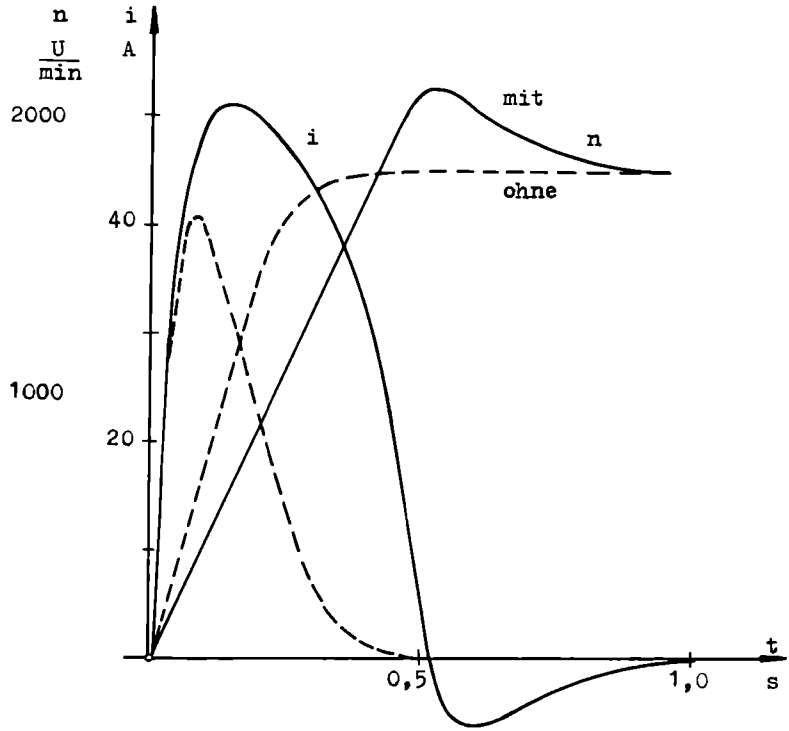


Abb. 14 Anlaufkurven eines fremderregten Gleichstrom-Motors

Speicherplan

	A	B	C	D	E
Wertepaare	t	ω	i	c	frei

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	t	ω	i	belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	$\frac{30}{\pi}$
	Anfangswerte								

10	11	12	13	14 bis 19
U	R	L	I	frei

1.3 Gekoppelte Differentialgleichung zweiter Ordnung, Differentialgleichung vierter Ordnung

1.3.1 Problemstellung und Lösungsweg

Die mathematische Beschreibung dynamischer Vorgänge führt häufig auf ein System von zwei oder mehreren Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die miteinander gekoppelt sind:

$$y'' = f(t,y,y',z,z')$$
$$z'' = g(t,y,y',z,z') \quad .$$

Für die beiden Gleichungen werden jetzt $2 \times 2 = 4$ Anfangsbedingungen benötigt: $y = y_0$, $y' = y'_0$, $z = z_0$, $z' = z'_0$ zur Zeit $t = 0$.

Um Fragen nach einer Balkenbiegung zu beantworten, muß eine Differentialgleichung vierter Ordnung gelöst werden, in der Glieder bis zur vierten Ableitung auftreten:

$$y^{IV} = f(x,y,y',y'',y''') \quad .$$

Ähnlich wie im Kapitel 1.2 führt die einfache Substitution $y'' = z$ eine Differentialgleichung vierter Ordnung auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurück:

$$y'' = z$$
$$z'' = f(x,y,y',z,z')$$

Beide Probleme können also nach dem gleichen Verfahren behandelt werden.

Beschreibung des Verfahrens

Für das Rechnen mit programmierbaren Taschenrechnern ist es zweckmäßig, die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht weiter in vier Differentialgleichungen erster Ordnung zu zerlegen, sondern die Doppelgleichung nach einem von NYSTRÖM vorgeschlagenen RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM-Verfahren zu behandeln. Dann umfaßt das Programm nur zwei parallel verlaufende, gekop-

pelte Rechnungsgänge mit je vier Zuwächsen, k_I und l_I (I = 1 bis 4), in y- und in z-Richtung. Aus diesen Zuwächsen werden jetzt allerdings vier Mittelwerte k, k', l, l' gebildet, um y, y', z, und z' nach einer Schrittweite h für den nächsten Punkt angeben zu können. Die für Taschenrechner vorgeschlagenen Verfahren sehen sich damit von der Differentialgleichung erster Ordnung bis zur Differentialgleichung vierter Ordnung sehr ähnlich. Sie unterscheiden sich nicht durch wachsende Schwierigkeit, sondern nur durch den Umfang der notwendigen numerischen Rechenarbeit.

An einer beliebigen Stelle x_n, y_n, y'_n, z_n, z'_n schreibt sich, für zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das Gleichungssystem nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM

Zuwachs

$$k_1 = \frac{h}{2}\cdot f(s_1) \qquad l_1 = \frac{h}{2}\cdot g(s_1)$$

$$s_1:\quad x_n\ ;\quad y_n\ ;\quad y'_n\ ;\quad z_n\ ;\quad z'_n$$

$$k_2 = \frac{h}{2}\cdot f(s_2) \qquad l_2 = \frac{h}{2}\cdot g(s_2)$$

$$s_2:\quad x_n + \frac{h}{2}\ ;\quad y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)\ ;\quad y'_n + k_1\ ;$$

$$z_n + \frac{h}{2}\left(z'_n + \frac{l_1}{2}\right)\ ;\quad z'_n + l_1$$

$$k_3 = \frac{h}{2}\cdot f(s_3) \qquad l_3 = \frac{h}{2}\cdot g(s_3) \tag{1.13}$$

$$s_3:\quad x_n + \frac{h}{2}\ ;\quad y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + \frac{k_1}{2}\right)\ ;\quad y'_n + k_2\ ;$$

$$z_n + \frac{h}{2}\left(z'_n + \frac{l_1}{2}\right)\ ;\quad z'_n + l_2$$

$$k_4 = \frac{h}{2}\cdot f(s_4) \qquad l_4 = \frac{h}{2}\cdot g(s_4)$$

$$s_4:\quad x_n + h\ ;\quad y_n + h(y'_n + k_3)\ ;\quad y'_n + 2k_3\ ;$$

$$z_n + h(z'_n + l_3)\ ;\quad z'_n + 2l_3\ ,$$

Mittelwert

$$k = \frac{1}{3}\cdot(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$k' = \frac{1}{3}\cdot(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (1.14)$$

$$l = \frac{1}{3}\cdot(l_1 + l_2 + l_3)$$

$$l' = \frac{1}{3}\cdot(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad ,$$

die Wertepaare des nächsten Punktes

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + k) \qquad (1.15)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + k'$$

$$z_{n+1} = z_n + h(z'_n + l)$$

$$z'_{n+1} = z'_n + l'$$

dienen wieder als Anfang für die nächste Schrittberechnung.

Programmablaufplan

Das Prinzip des Ablaufplanes der Abb.10 kann für zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung übernommen werden (Abb.15). Die richtige Schrittbemessung bleibt unverändert wichtig. Das umfangreiche Gleichungssystem wird aber für eine Fein- und eine Grobrechnung die beschränkte Speicherkapazität eines Taschenrechners langsam übersteigen. Auf den um Korrektur und Schrittsteuerung erweiterten Ablaufplan wird daher verzichtet. An Hand der bisherigen Beispiele wird es sicher dem Leser im Bedarfsfall gelingen, den erweiterten Ablaufplan selber zu erstellen, indem er für die Schrittsteuerung den größten Betrag von jetzt vier Korrekturwerten benutzt.

1.3.2 Beispiel. Wasserspiele

Aus einem Wasserspeier spritzt, unter einem gegebenen Winkel α und mit einer bestimmten Geschwindigkeit v, ein Wasserstrahl

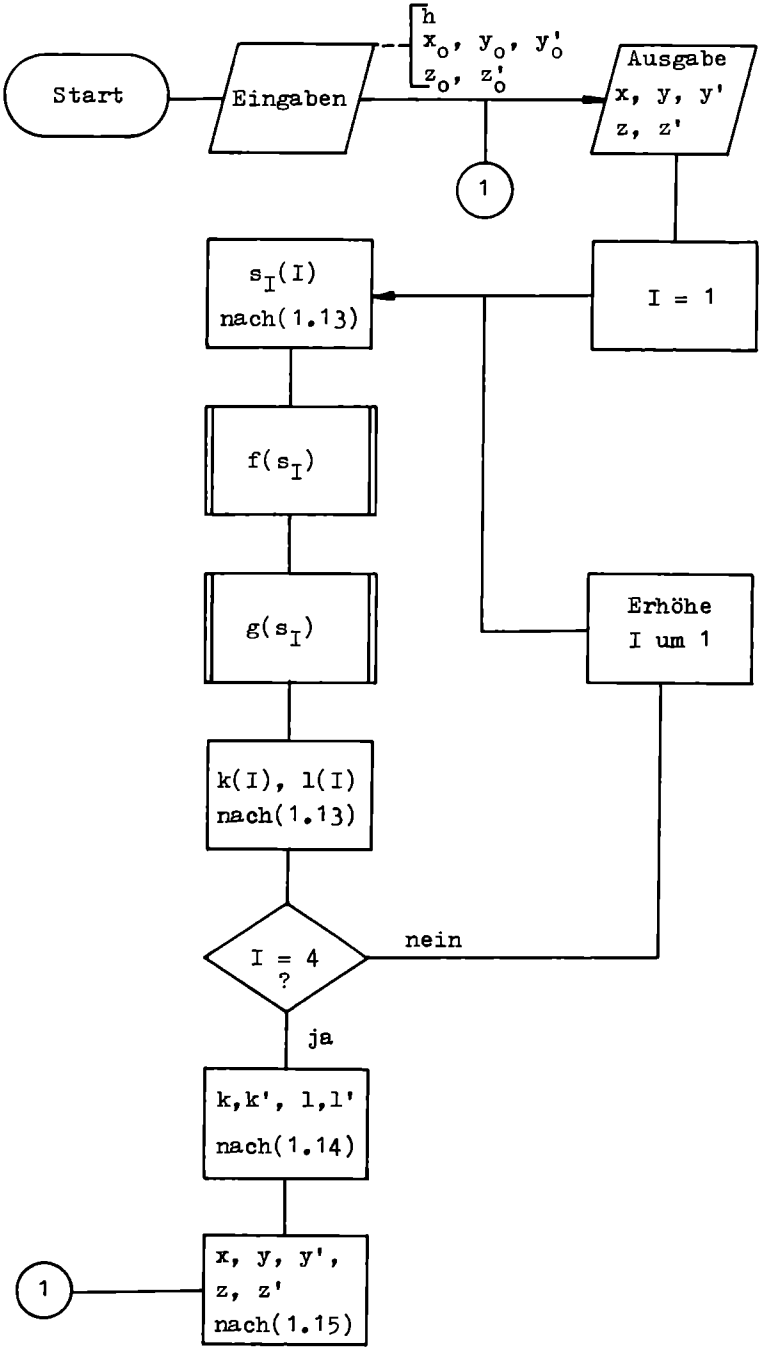


Abb. 15 Differentialgleichung vierter Ordnung

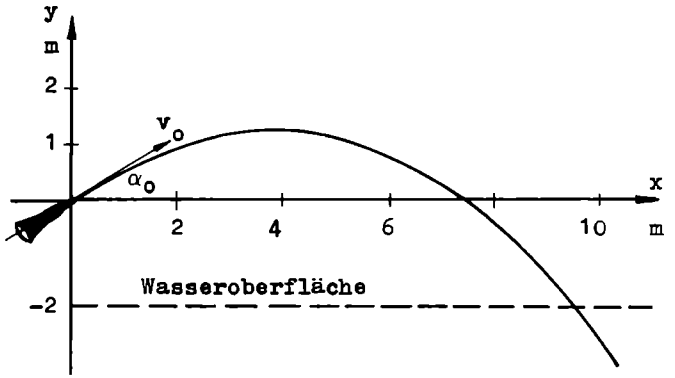


Abb. 16 Wasserfontäne

(Abb.16). Gesucht wird die Bahnkurve der Fontäne unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes.
Wir wollen einen Wassertropfen als kleine Kugel ansehen und die Aufgabe mit folgenden Zahlen rechnen:

Kugelradius	$r = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$	m
"Schattenfläche"	$A_s = \pi r^2$	m^2
Volumen	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	m^3
Masse	m	$\frac{Ns^2}{m}$
Widerstandsziffer	$c = 0{,}09$	
Dichte der Luft	$\rho = 1{,}2066$	$\frac{Ns^2}{m^4}$
Erdbeschleunigung	$g = 9{,}81$	$\frac{m}{s^2}$
Anfangswinkel	$\alpha_o = 30^\circ$	
Anfangsgeschwindigkeit	$v_o = 10$	$\frac{m}{s}$

Die Fragestellung führt auf zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit dem Ansatz der Beschleunigung in x- und y- Richtung (Punkte sollen Ableitungen nach der Zeit bedeuten):

$$\ddot{x} = -\frac{W}{m} \cos\alpha$$

$$\ddot{y} = -\frac{W}{m} \sin\alpha - g$$

mit dem Luftwiderstand

$$W = \frac{1}{2}\, c\, \rho\, A_s\, v^2 = a \cdot v^2 \qquad N\ .$$

Wir ersetzen die Bahngeschwindigkeit und den Bahnwinkel des Wassertropfens durch

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \qquad \text{und} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

und erhalten abschließend

$$\ddot{x} = -\frac{a}{m}\cdot(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\cdot\cos\left[\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right]$$

$$\ddot{y} = -\frac{a}{m}\cdot(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\cdot\sin\left[\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right] - g\ .$$

Die Anfangswerte zur Zeit t = 0 sind

$$x_o = 0 \quad m$$

$$y_o = 0 \quad m$$

$$x_o = v_o \cdot \cos\alpha_o = 8{,}6603 \quad \frac{m}{s}$$

$$y_o = v_o \cdot \sin\alpha_o = 5{,}0000 \quad \frac{m}{s}\ ,$$

Schrittweite

$$h = 0{,}01\ m$$

$$\frac{a}{m} = 3{,}3936 \cdot 10^{-2} \quad \frac{1}{m}\ .$$

Ergebnis:

t s	x m	y m
0	0	0
0,2	1,68	0,78
0,4	3,26	1,13
0,6	4,76	1,08
0,8	6,19	0,65
1,0	7,54	-0,14
1,1	8,19	-0,67
1,2	8,82	-1,27
1,3	9,43	-1,96

Die Mittelwerte k, k' und l, l' wurden bei einem HP 67 parallel auf den Primär- und Sekundärspeichern gerechnet

Hauptprogramm

LBL A	SF 0	GSB B	RCL 1	RCL 1	LBL B
RCL 0	GSB B	GSB 0	STO C	+	RCL D
RCL 3	GSB 0	STO+3	P⟲S	RTN	RCL B
RCL 4	GSB C	STO+5	GSB 3	LBL 3	:
P⟲S	P⟲S	GSB C	P⟲S	3	TAN^{-1}
STO 2	GSB 0	P⟲S	GTO a	STO:4	STO 7
STO D	GSB 1	GSB 0	LBL 0	STO:5	COS
R↓	STO D	STO+3	RCL 0	RCL 5	RCL D
STO 1	1	STO+5	x	RCL 2	x^2
STO C	GSB 2	GSB 1	STO 3	+	RCL B
R↓	STO C	STO D	F?0	STO 2	x^2
STO 0	P⟲S	2	STO+4	Lastx	+
LBL a	GSB 1	GSB 2	STO+5	RCL 4	RCL 6
0	STO B	STO C	RTN	+	x
STO 4	1	P⟲S	LBL 1	RCL 0	STO 8
STO 5	GSB 4	GSB 1	RCL 2	x	x
P⟲S	GSB B	STO B	RCL 3	2	RTN
STO 4	GSB 0	2	+	x	
STO 5	STO+5	GSB 4	RTN	STO+1	
RCL E	GSB C	CF 0	LBL 2	RTN	
-X-	P⟲S	GSB B	x⟲y	LBL 4	LBL C
RCL 2	GSB 0	GSB 0	RCL 3	GSB 2	RCL 7
STO B	STO+5	GSB C	2	STO A	SIN
RCL 1	GSB 1	P⟲S	:	RCL 0	RCL 8
STO A	STO D	GSB 0	-	RCL E	x
-X-	P⟲S	GSB 3	x	+	RCL 9
RCL C	GSB 1	RCL 2	RCL 0	STO E	-
-X-	STO B	STO D	x	RTN	RTN

Unterprogramme für f und g

Speicherplan

	A	B	C	D	E
Wertepaare	x	$\dot{x}$	y	$\dot{y}$	t

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	x_0	$\dot{x}_0$	y_0	$\dot{y}_0$	belegt	$-\frac{a}{m}$	belegt	belegt	9,81

Anfangswerte

10	11	12	13	14	15	16 bis 19
belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	frei

2. Differentialgleichungen mit Randwerten

2.1 Einführung

Bei der bisher behandelten Aufgabenstellung waren neben der Differentialgleichung noch Anfangswerte gegeben, d.h. gewünschte Daten der Lösungskurve $y(x)$ und deren Ableitungen an einer Stelle, der Anfangsstelle x_0. Bei vielen technisch interessanten Fragen müssen aber bestimmte Funktionswerte und deren Ableitungen an mehreren Stellen der Lösungskurve gefordert werden, meist am Anfang und am Ende eines Intervalles, d.h. an dessen Rändern. Jetzt sucht man also die Lösung der Differentialgleichung, die zusätzlich auch noch die gegebenen Bedingungen an den Rändern eines Intervalles erfüllt (Randwertaufgabe). So ist z.B. die Frage nach der Durchbiegung eines auf zwei Stützen gelagerten Balkens eine typische Randwertaufgabe. Die Forderung, daß an den Stützstellen die Durchbiegung Null sein soll, sind die Randbedingungen.
In diesem einfachen Falle sind für die Lösungskurve $y(x)$ die Anfangs- und Endordinaten $y(x_a)$ und $y(x_b)$ gegeben. Die Lösungskurve wird im Intervall

$$x_a \leqslant x \leqslant x_b$$

gesucht. Die vorgegebenen Randbedingungen am Intervallanfang werden allgemein als Anfangsrandbedingungen (ARB), die am Intervallende als Endrandbedingungen (ERB) bezeichnet (Abb.17).
Randwertaufgaben finden sich erst ab Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Außerdem sind viele von ihnen linear, d.h. sowohl in der Differentialgleichung als auch in den Randbedingungen treten die Funktion y und deren Ableitungen nur in linearer Form auf. Linearität bedeutet aber, daß sich die Lösung aus mehreren Einzellösungen zusammensetzen läßt

$$y(x) = y_1(x) + K_2 y_2(x) + K_3 y_3(x) + \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

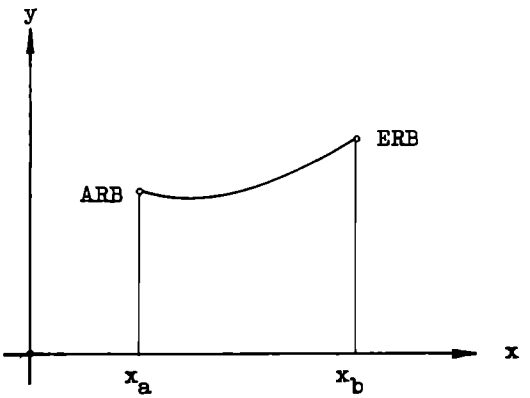


Abb. 17 Randwertaufgabe

Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit, lineare Randwertaufgaben auf Anfangswertaufgaben zurückzuführen. Da Randwertaufgaben einen höheren Schwierigkeitsgrad als Anfangswertprobleme besitzen, so bescheiden wir uns für Taschenrechner auf die Lösung linearer Randwertaufgaben.

2.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung

Eine vorliegende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x,y,y')$$

betrachten wir in einer etwas ausführlicheren Schreibweise:

$$y'' = p \cdot y' + q \cdot y + r \quad ; \tag{2.1}$$

p, q und r können Funktionen von x sein. Die Randbedingungen setzen sich im allgemeinsten Falle aus einer Linearkombination von Ordinaten und Kurvensteigungen zusammen:

$$\begin{aligned} &\text{ARB:} \quad \alpha_1 y(x_a) + \alpha_2 y'(x_a) = A \quad , \\ &\text{ERB:} \quad \beta_1 y(x_b) + \beta_2 y'(x_b) = B \quad . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung beschränkt sich der Lösungsansatz auf zwei unabhängige Funktionen y_1 und y_2:

$$y(x) = y_1(x) + K \cdot y_2(x) \quad . \tag{2.3}$$

Die Bestimmung dieser beiden Funktionen über eine Aufgabenstellung mit Anfangswerten gelingt unter den folgenden Bedingungen:

1. y_1 muß die Differentialgleichung $y'' = f(x,y,y')$ erfüllen.
2. y_2 muß den homogenen Teil der Differentialgleichung

   $$y'' = p \cdot y' + q \cdot y = f_{hom}(x,y,y')$$

   erfüllen ($r = 0$).
3. y muß für jedes beliebige K die ARB erfüllen.

Die dritte Bedingung ist dann eingehalten, wenn für die Teillösung y_1

$$\alpha_1 y_1(x_a) + \alpha_2 y_1'(x_a) = A \tag{2.4}$$

und für die Teillösung y_2

$$\alpha_1 y_2(x_a) + \alpha_2 y_2'(x_a) = 0$$

gilt. Der bis dahin noch freie Faktor K kann dann so gewählt werden, daß die Gesamtlösung $y(x)$ auch noch die ERB erfüllt. Die ausführliche mathematische Beschreibung findet man in der Spezialliteratur, z.B. /5/.

Beschreibung des Verfahrens

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x,y,y')$$

wird zunächst in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung überführt:

$$y' = z$$

$$z' = pz + qy + r = f(x,y,z) \quad .$$

Beide Gleichungen werden im Intervall $x_a \leqslant x \leqslant x_b$ zweimal mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N} \quad , \qquad N \text{ ganze Zahl,}$$

als Anfangswertaufgabe nach RUNGE-KUTTA durchgerechnet (Abb.18).
Erste Durchrechnung für die Teillösung y_1:
Die Differentialgleichung erhält die Anfangswerte

$$y_1(x_a) = \frac{A}{\alpha_1} \quad \text{und} \quad y_1'(x_a) = z_1(x_a) = 0 \quad , \tag{2.5}$$

oder, falls $\alpha_1 = 0$ ist,

$$y_1(x_a) = 0 \quad \text{und} \quad y_1'(x_a) = z_1(x_a) = \frac{A}{\alpha_2} \quad .$$

Gespeichert oder notiert werden die hierbei errechneten Funktionswerte $y_1(x)$ sowie die erreichten Daten am Intervallende x_b:
$y_1(x_b)$ und $y_1'(x_b) = z_1(x_b)$.

Zweite Durchrechnung für die Teillösung y_2:
Für diese Rechnung wird, bei gleicher Schrittweite h, nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} genommen ($r = 0$).
Die Anfangswerte sind

$$y_2(x_a) = \alpha_2 \quad \text{und} \quad y_2'(x_a) = z_2(x_a) = -\alpha_1 \quad . \tag{2.6}$$

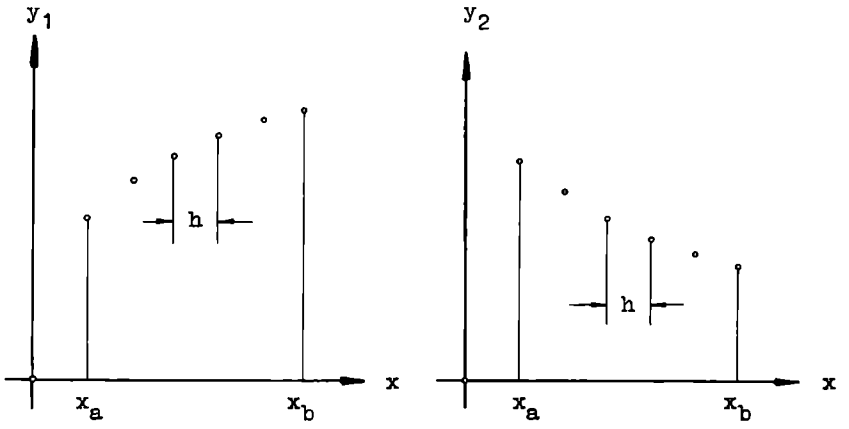


Abb. 18 Zur Lösung einer Randwertaufgabe

Auch hier werden die errechneten Funktionswerte $y_2(x)$ gespeichert oder notiert, sowie die Daten am Intervallende x_b: $y_2(x_b)$ und $y_2'(x_b) = z_2(x_b)$.

Die Anfangswerte nach (2.5) und (2.6) in der ersten und zweiten Durchrechnung erfüllen die Gleichungen (2.4) in einfachster Weise, wie man sich leicht überzeugen kann.

Im anschließenden Rechnungsgang wird die Gesamtlösung an die ERB angepaßt, durch die Festlegung der noch freien Konstanten K. Aus

$$K\cdot\Big(\beta_1 y_2(x_b) + \beta_2 z_2(x_b)\Big) + \beta_1 y_1(x_b) + \beta_2 z_1(x_b) = B$$

folgt

$$K = \frac{B - \Big(\beta_1 y_1(x_b) + \beta_2 z_1(x_b)\Big)}{\beta_1 y_2(x_b) + \beta_2 z_2(x_b)} \quad . \tag{2.7}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich ablesen, daß die Randwertaufgabe nur dann eindeutig lösbar ist, wenn der Nenner nicht zu Null wird.

Zum Abschluß werden die notierten oder gespeicherten Funktionswerte zur Gesamtlösung (2.3) zusammengesetzt

$$y(x) = y_1(x) + K\cdot y_2(x) \quad .$$

Programmablaufplan

Zur Vereinfachung sind im Ablaufplan Abb.19 die Berechnung der Mittelwerte k und l nach RUNGE-KUTTA als Unterprogramme gezeichnet. Es ist darauf zu achten, daß bei der zweiten Durchrechnung nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} genommen werden darf. Bei Taschenrechnern, die mit Flags ausgerüstet sind, läßt sich dieses durch Setzen eines Flags bequem erreichen. Flags sind elektronische Schalter, die man in einem Programm entweder setzt (einschaltet) oder löscht (ausschaltet).

2.3 Beispiel. Seil mit Schneelast

Die physikalische Theorie eines durchhängenden Seiles führt auf die Differentialgleichung

$$S\cdot y'' = -\,q(x)$$

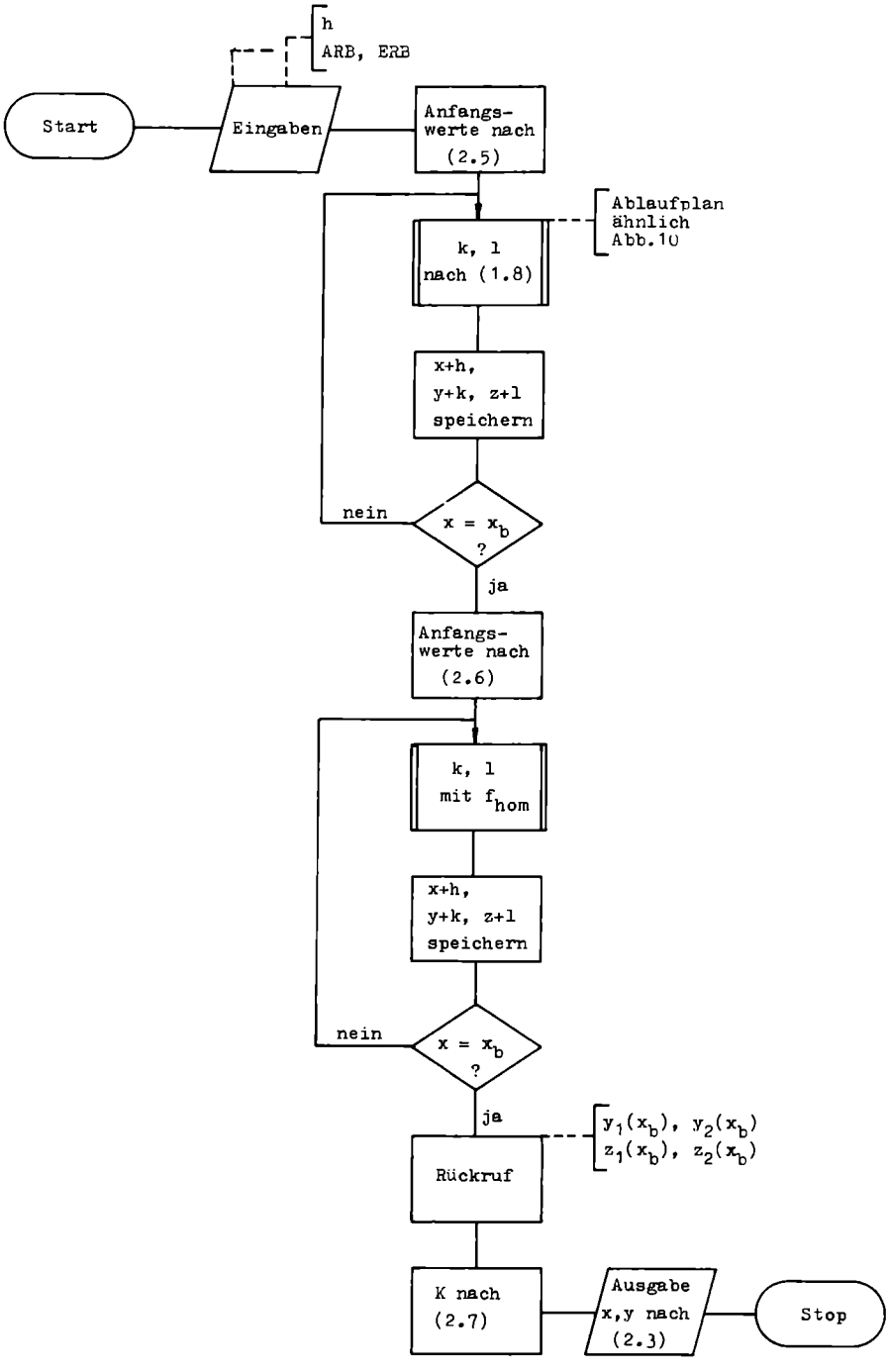


Abb. 19 Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Randwerten

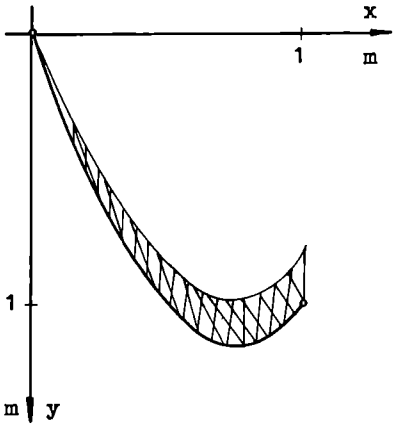


Abb. 20 Seil mit Schneelast

Seilzug S N , Last pro Längeneinheit q $\frac{N}{m}$.
Auf dem Seil liege eine Schneelast veränderlicher Stärke (Abb.20).

Wir approximieren diese Last durch die Funktion

$$q = q_o \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{x_b}\right) \quad .$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{q_o}{S} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{x_b}\right) \quad .$$

Die Berechnung des Seildurchhanges y(x) erfolgt mit dem Zahlenwert

$$\frac{q_o}{S} = 6 \quad \frac{1}{m} , \quad \text{einer Schrittweite} \quad h = 0{,}125 \quad m$$

und den Randwerten

ARB $x_a = 0$ m , $y(x_a) = 0$ m ; also $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $A = 0$

ERB $x_b = 1$ m , $y(x_b) = 1$ m ; also $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $B = 1$.

Das Rechenprogramm enthält keine Ausgabe der Teillösung y_1 und y_2. In der Ergebniszusammenstellung sind sie aber mit aufgeführt.

x	y_1	y_2	y(x)	K = - 2,388
m	m	m	m	
0,000	0,000	0,000	0,000	
0,125	- 0,003	- 0,125	0,295	
0,250	- 0,024	- 0,250	0,573	
0,375	- 0,081	- 0,375	0,814	
0,500	- 0,190	- 0,500	1,004	
0,625	- 0,365	- 0,625	1,127	
0,750	- 0,618	- 0,750	1,173	
0,875	- 0,957	- 0,875	1,132	
1,000	- 1,388	- 1,000	1,000	

Programm für einen HP 67

Hauptprogramm

```
LBL A     STO+1     STO+4     CF 0      +
RCL 1     R↓        STO+4     GTO A     RCL A
STO A     GSB 0     GSB C     LBL 2     -X-
1         STO-5     RCL 0     RCL B     R↓
-         RCL 6     x         RCL 8     -X-
x =0      STO-4     STO+5     x         GTO 5
SF 2      3         STO+5     RCL C
RCL 2     STO:4     RTN       RCL 9
STO B     STO:5     LBL 1     x
F? 1      RCL 0     F? 1      +
GTO 3     STO+1     GTO 2     STO-7
GTO 4     RCL 4     F? 0      0
LBL 5     STO+2     GTO 6     STO 1
RCL 3     RCL 5     RTN       RCL E
STO C     STO+3     LBL 6     STO 2
F? 2      GTO A     RCL B     RCL D
GTO 1     LBL 0     RCL 8     CHS
GSB B     RCL 3     x         STO 3
RCL 0     +         RCL C     SF 0
x         STO C     RCL 9     CF 1
STO 4     RCL 6     x         GTO A
STO 6     RCL 2     +         LBL 3
GSB C     +         STO:7     ISZ
RCL 0     STO B     0         STO(i)
x         RCL 1     STO 1     GTO 5
STO 5     RCL 0     RCL E     LBL 4
GSB 0     +         STO 2     F? 0
GSB 0     STO A     RCL D     GTO 5
2         GSB B     CHS       ISZ
STOx6     RCL 0     STO 3     RCL 7
x         x         9         x
RCL 0     STO 6     ST I      RCL(i)
```

Unterprogramme für f und g

```
LBL B
RCL C
RTN
LBL C
GSB a
RCL C
x
GSB b
RCL B
x
+
F? 1
GSB c
RTN
LBL a
LBL b
0
RTN
LBL c
RAD
RCL A
π
x
2
:
SIN
6
x
CHS
+
RTN
```

Vor dem Programmstart ist Flag 1 zu setzen!

Speicherplan

Die Werte $x_b = 1$ und $x_a = 0$ sind im Hauptprogramm die Programmschritte Nr.4 und Nr.88, Nr.108. Im Register I für die indirekte Steuerung ist die Zahl 9 zu speichern.

		A	B	C	D	E	I		
Wertepaare		x	y	z	α_1	α_2	9		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	x_a	ARB 1.Durchr.		belegt	belegt	belegt	B	β_1	β_2

Bei der ersten Durchrechnung werden die Funktionswerte y_1 in den Sekundärspeichern (maximal zehn Werte) gespeichert.

2.4 Differentialgleichung vierter Ordnung

Das beschriebene Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Randwerten läßt sich auch auf Differentialgleichungen vierter Ordnung anwenden. Eine Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{IV} = f(x,y,y',y'',y''')$$

kann nach Kapitel 1.3 in zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführt werden. Am Anfang und am Ende des Intervalls $x_a \leqslant x \leqslant x_b$ müssen somit bestimmte Aussagen über zwei ARB A_1 und A_2 und zwei ERB B_1 und B_2 vorliegen. Durch zwei ARB sind von den vier Funktionsdaten y, y', y'', y''' am Intervallanfang nur zwei festgelegt. Demnach kann noch über die beiden anderen als sogenannte freie Anfangswerte AW verfügt werden.
In der folgerichtigen Erweiterung des beschriebenen Verfahrens setzt sich die Lösung der linearen Differentialgleichung vierter Ordnung aus drei unabhängigen Teillösungen y_1, y_2 und y_3 zusammen

$$y(x) = y_1(x) + K_2y_2(x) + K_3y_3(x) \quad , \tag{2.8}$$

und zwar so, daß die Gesamtlösung $y(x)$, für beliebige Werte von K_2 und K_3, der Differentialgleichung vierter Ordnung und den beiden ARB genügt. Die Anpassung der Lösung $y(x)$ an die zwei ERB erfolgt durch die Festlegung der bis dahin noch freien Faktoren K_2 und K_3.

Beschreibung des Verfahrens

Die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{IV} = f(x,y,y',y'',y''')$$

wird zunächst in zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufgeteilt

$$y'' = z$$
$$z'' = f(x,y,y',z,z') \quad .$$

Beide werden im Intervall $x_a \leqslant x \leqslant x_b$ dreimal mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N} \quad , \qquad N \text{ ganze Zahl,}$$

als Anfangswertaufgabe nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM durchgerechnet (Abb.21).

Erste Durchrechnung für die Teillösung y_1:
Die Differentialgleichung hat die vorgegebenen Anfangswerte bei Nullsetzung der beiden freien AWs

$$1.\ ARB = A_1 \ ; \quad 2.\ ARB = A_2 \ ; \quad 1.\ AW = 0 \ ; \quad 2.\ AW = 0 \ . \qquad (2.9)$$

Notiert oder gespeichert werden die hierbei errechneten Funktionswerte $y_1(x)$ und die am Intervallende x_b erreichten Daten b_{11} und b_{12} der durch die zwei ERB gegebenen Funktionen.

Zweite Durchrechnung für die Teillösung y_2:
Für diese Rechnung wird, bei gleicher Schrittweite h, nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} genommen. Die Anfangswerte sind

$$1.\ ARB = 0 \ ; \quad 2.\ ARB = 0 \ ; \quad 1.\ AW = 1 \ ; \quad 2.\ AW = 0 \ . \qquad (2.10)$$

Notiert oder gespeichert werden die Funktionswerte $y_2(x)$ und die am Intervallende x_b erreichten Daten b_{21} und b_{22} der interessierenden Funktionen.

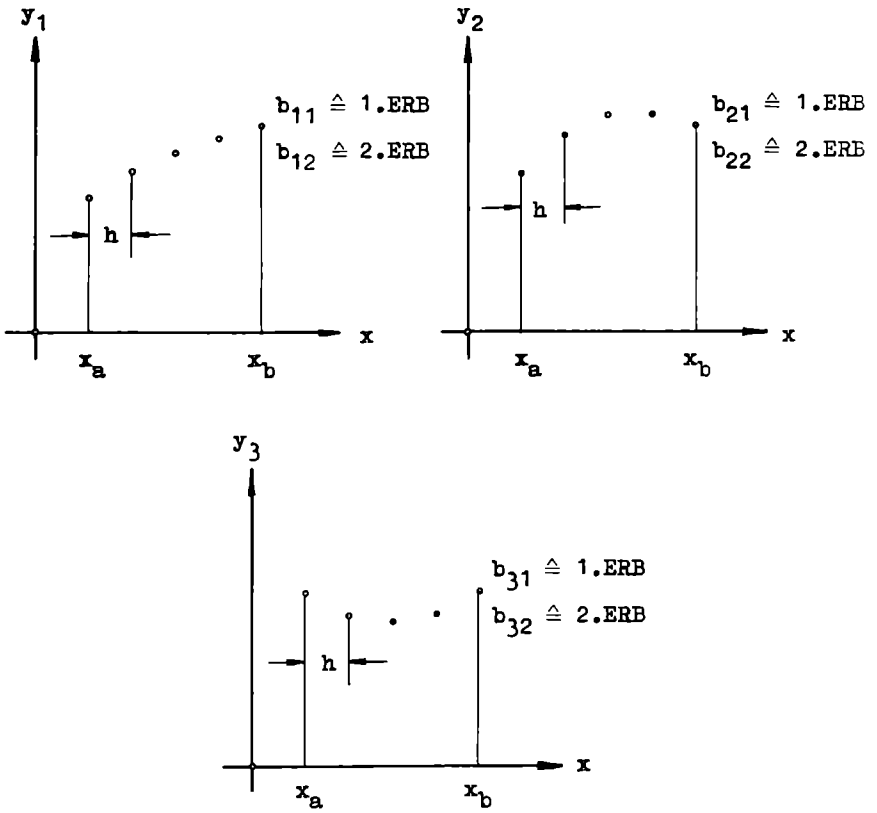


Abb. 21 Zur Lösung einer Randwertaufgabe

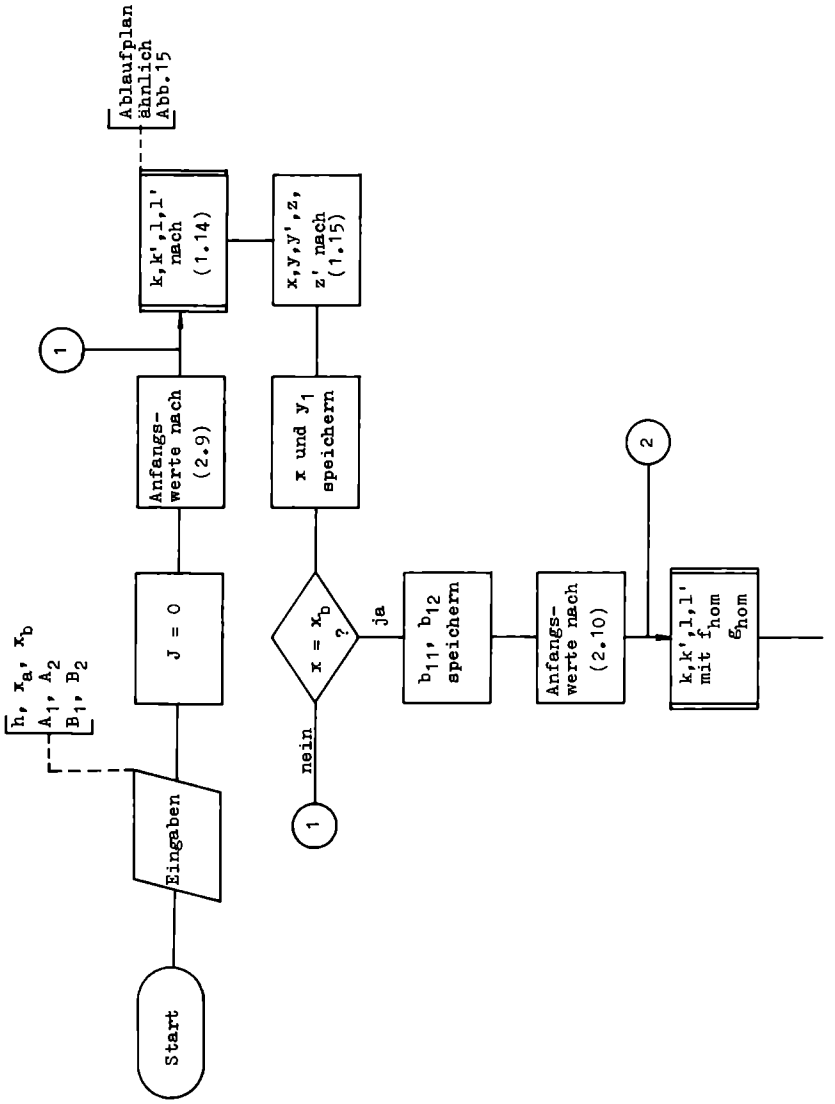
Dritte Durchrechnung für die Teillösung y_3:
Bei gleichbleibender Schrittweite h wird nur mit dem homogenen Teil der Differentialgleichung gerechnet. Die Anfangswerte sind

$$1.\ ARB = 0\ ;\quad 2.\ ARB = 0\ ;\quad 1.\ AW = 0\ ;\quad 2.\ AW = 1\ . \qquad (2.11)$$

Die Funktionswerte $y_3(x)$ und die interessierenden Daten b_{31} und b_{32} am Intervallende werden notiert oder gespeichert.
Für die Anpassung der Lösung y(x) an die zwei ERB B_1 und B_2 ergeben sich zwei Gleichungen mit den beiden unbekannten Koeffizienten K_2 und K_3:

$$b_{21}\cdot K_2 + b_{31}\cdot K_3 = B_1 - b_{11}$$

$$b_{22}\cdot K_2 + b_{32}\cdot K_3 = B_2 - b_{12}\ .$$


Start
Eingaben
h, x_a, x_b
A_1, A_2
B_1, B_2
J = 0
Anfangs-
werte nach
(2.9)
1
k,k',l,l'
nach
(1.14)
Ablaufplan
ähnlich
Abb.15
x,y,y',z,
z' nach
(1.15)
x und y_1
speichern
x = x_b
?
ja
nein
1
b_{11}, b_{12}
speichern
Anfangs-
werte nach
(2.10)
2
k,k',l,l'
mit f_{hom}
g_{hom}

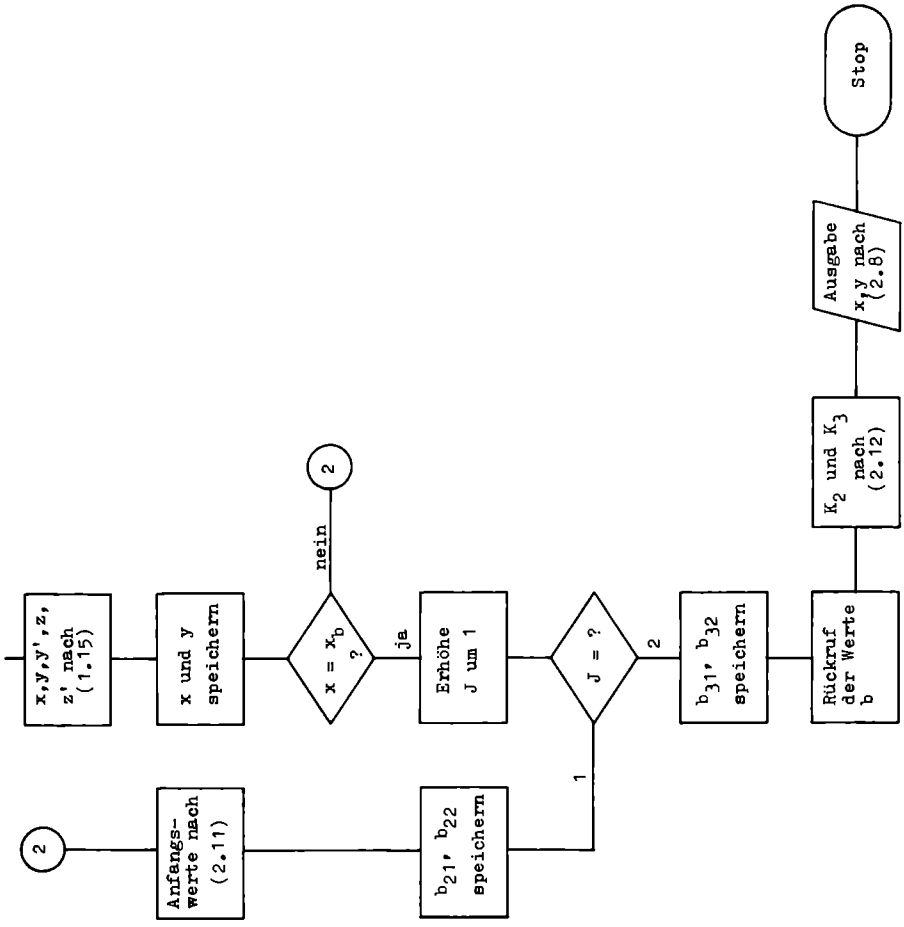


Abb. 22 Differentialgleichung vierter Ordnung mit Randwerten

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach K_2 und K_3

$$K_2 = \frac{(B_1 - b_{11})b_{32} - (B_2 - b_{12})b_{31}}{b_{21}\ b_{32} - b_{22}\ b_{31}} \tag{2.12}$$

$$K_3 = \frac{(B_2 - b_{12})b_{21} - (B_1 - b_{11})b_{22}}{b_{21}\ b_{32} - b_{22}\ b_{31}}$$

ermöglicht die notierten Werte der drei Funktionen y_1, y_2 und y_3 zur Gesamtlösung (2.8) zusammenzusetzen:

$$y(x) = y_1 + K_2 y_2(x) + K_3 y_3(x) \quad .$$

Programmablaufplan

Im Ablaufplan (Abb.22) ist die Berechnung der Mittelwerte k, k', l und l' nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM als Unterprogramm gezeichnet. Zu beachten ist, daß die dreimalige Durchrechnung der Differentialgleichung mit jeweils anderen Anfangswerten erfolgen muß. Außerdem darf bei der zweiten und dritten Rechnung nur der homogene Teil der Differentialgleichung f_{hom} Verwendung finden, was sich durch das Setzen eines Flags wieder bequem erreichen läßt.

2.5 Beispiel. Belasteter Balken auf elastischer Unterlage

Die mathematische Beschreibung der Balkenbiegung (Abb.23) führt auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$EI \cdot y^{IV} + k \cdot y = q \quad ,$$

Biegesteifigkeit EI, Bettungsziffer k, Last pro Längeneinheit q. Die Differentialgleichung wird überführt in

$$EI \cdot y'' = z$$

$$z'' = q - k \cdot y \quad .$$

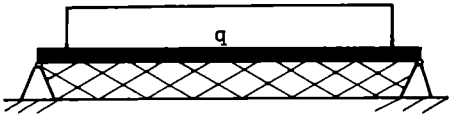


Abb. 23 Elastisch gebetteter Balken

Berechnet wird die Durchbiegung eines Trägers vom Normalprofil NP I 20, Länge 10 m, $EI = 4{,}5 \cdot 10^6\ Nm^2$, $k = 100\ \frac{N}{m^2}$, $q = 800\ \frac{N}{m}$,

Randbedingungen

$x_a = 0\ m$, $x_b = 10\ m$

1. ARB	$y(x_a) = 0$	1. AW	$y'(x_a)$
2. ARB	$z(x_a) = 0$	2. AW	$z'(x_a)$
1. ERB	$y(x_b) = 0$		
2. ERB	$z(x_b) = 0$		

Schrittweite $h = 1\ m$.

Ergebnis

x m	y_1 m	y_2 m	y_3 m	y(x) mm
0	$0{,}0 \cdot 10^{-3}$	0,0	$0{,}0 \cdot 10^{-6}$	0,0
2	0,118	2,0	0,296	13,72
4	1,896	4,0	2,370	22,00
6	9,600	5,999	8,000	22,00
8	30,340	7,994	18,960	13,72
10	$74{,}060 \cdot 10^{-3}$	9,981	$37{,}030 \cdot 10^{-6}$	0,0

$K_2 = 7{,}391 \cdot 10^{-3}$

$K_3 = -\ 3{,}993 \cdot 10^{+3}$

Programm für einen HP 67

Hauptprogramm

					Unterprogramm für f und g
LBL A	GSB 1	GSB 4	+	ISZ	LBL B
RCL 0	STO D	CF 0	RTN	CF 1	P⟲S
RCL 3	1	GSB B	LBL 3	GTO A	RCL C
RCL 4	GSB 2	GSB 0	3	LBL 8	RCL 6
P⟲S	STO C	GSB C	STO:4	RCL A	:
STO 2	P⟲S	GSB 0	STO:5	STO 8	P⟲S
STO D	GSB 1	GSB 3	RCL 5	RCL C	RTN
R↓	STO B	RCL 2	RCL 2	STO 9	
STO 1	1	STO D	+	1	LBL C
STO C	GSB 4	RCL 1	STO 2	STO 4	P⟲S
R↓	GSB B	STO C	LASTX	0	RCL 7
STO 0	GSB 0	P⟲S	RCL 4	STO E	RCL A
LBL a	STO+5	GSB 3	+	STO 1	RCL 8
0	GSB C	P⟲S	RCL 0	STO 3	x
STO 4	GSB 0	GTO a	x	STO 2	F? 1
STO 5	STO+5	LBL 0	2	ISZ	+
P⟲S	GSB 1	RCL 0	x	GTO A	RTN
STO 4	STO D	x	STO+1	LBL 9	
STO 5	P⟲S	STO 3	RTN	RCL A	
RCL E	GSB 1	F? 0	LBL 4	RCL 8	
-X-	STO B	STO+4	GSB 2	STO:6	
1	GSB B	STO+5	STO A	:	
0	GSB 0	RTN	RCL 0	STO 5	
-	STO+3	LBL 1	RCL E	RCL 9	
x =0	STO+5	RCL 2	+	x	
SF 2	GSB C	RCL 3	STO E	RCL C	
RCL 2	GSB 0	+	RTN	-	
STO B	STO+3	RTN	LBL 7	RCL 9	
RCL 1	STO+5	LBL 2	RCL A	RCL 6	
STO A	GSB 1	x⟲y	STO-6	x	
-X-	STO D	RCL 3	RCL C	STO-7	
F? 2	2	2	STO-7	R↓	
GTO(i)	GSB 2	:	1	STO:7	
SF 0	STO C	-	STO 2	RCL 7	
GSB B	P⟲S	x	0	RCL 5	
GSB 0	GSB 1	RCL 0	STO E	x	
GSB C	STO B	x	STO 1	STO+6	
GSB 0	2	RCL 1	STO 3	RTN	

Die zweite Durchrechnung der Differentialgleichung beginnt mit dem Programmschritt Nr. 147, die dritte Durchrechnung mit Nr. 161 und die Lösung der zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bei Nr. 170. Der errechnete Wert K_2 befindet sich anschließend im Datenspeicher 6, minus K_3 im Datenspeicher 7.
Vor dem Programmstart ist Flag 1 zu setzen!

Speicherplan

Die interessierenden Daten am Intervallende x_b werden im Hauptprogramm abgefragt

1. ERB : Nr. 143, 157, 171,
2. ERB : Nr. 145, 159, 178 .

Die Anfangsbedingungen für die zweite und dritte Durchrechnung sind im Programm die Nr. 147 bis 152 und Nr. 161 bis 167. Der Wert $x_b = 10$ ist der Schritt Nr. 22/23. Im Register I für die indirekte Steuerung ist die Zahl 7 zu speichern.

	A	B	C	D	E	I
Wertepaare	y	y'	z	z'	x	7

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	$y(x_a)$	$y'(x_a)$	$z(x_a)$	$z'(x_a)$	belegt	B_1	B_2	b_{21}	b_{22}
		Anfangswerte				K_2	$-K_3$		

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	EI	q	-k	frei

3. Differentialgleichungen mit Eigenwerten

3.1 Einführung

Wichtige technische Anwendungsgebiete werden durch homogene Randwertaufgaben beschrieben. Das sind Aufgaben, für die sowohl die Differentialgleichung als auch die Randbedingungen homogen ausfallen, d.h. in denen nur Glieder mit der Funktion y oder deren Ableitungen vorkommen. Solche Randwertaufgaben sind häufig Eigenwertprobleme. Darunter versteht man eine homogene Differentialgleichung, in der ein zunächst unbestimmter Parameter λ auftritt, z.B.

$$y'' = \lambda \cdot q \cdot y \quad .$$

Nur für ganz bestimmte Werte dieses Parameters λ , der auch in den Randbedingungen enthalten sein kann, wird die Randwertaufgabe lösbar. Eigenschwingungszahlen schwingungsfähiger Systeme oder das Knicken eines Stabes sind solche Eigenwertprobleme. Hier

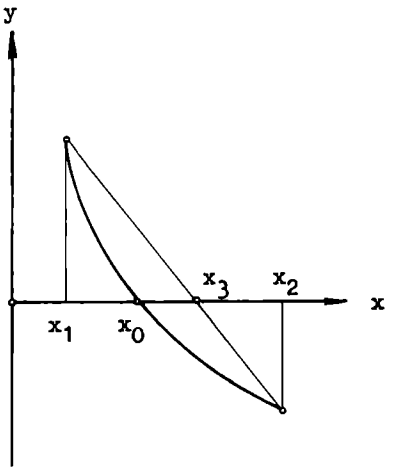


Abb. 24 Regula falsi

ist das Ziel der Rechnung das Auffinden der speziellen λ - Werte, der sogenannten Eigenwerte. Damit sind die Eigenwertaufgaben eng mit den Randwertaufgaben des vorigen Kapitels verbunden.
Das systematische Herantasten an den unbekannten Parameterwert, der eine Lösung garantiert, gelingt sehr gut mit Hilfe der einfachen Regula falsi. Diese alte numerische Methode sorgt für die angenäherte Bestimmung der Nulldurchgänge (Wurzeln) beliebiger Funktionen. Zwischen zwei "falschen Ansätzen" (Schätzwerten) x_1 und x_2 wird die Funktion $y(x)$ durch eine Gerade ersetzt (Abb.24). Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Achse wird als verbesserter Schätzwert x_3 genommen. Auf diese Weise tastet man sich numerisch immer näher an den exakten Nulldurchgang x_o heran.

3.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung

Die Randwertaufgabe des Kapitels 2.2 vereinfacht sich für den homogenen Fall:

Differentialgleichung

$$y'' = f(x,y,y') = p\cdot y' + q\cdot y \tag{3.1}$$

Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\text{ARB:} \quad \alpha_1 y(x_a) + \alpha_2 y'(x_a) = 0 \\ &\text{ERB:} \quad \beta_1 y(x_b) + \beta_2 y'(x_b) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Der Lösungsansatz reduziert sich auf

$$y(x) = K\cdot y_2(x) \ , \tag{3.3}$$

d.h. die Eigenlösung (Eigenfunktion, Eigenvektor) $y(x)$ läßt sich nur bis auf einen Faktor K bestimmen.

Beschreibung des Verfahrens

Die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung wird in der bekannten Weise in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster

Ordnung überführt. Dann werden beide im Intervall $x_a \leqslant x \leqslant x_b$ mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N} \quad , \qquad N \text{ ganze Zahl,}$$

und einem geschätzten λ - Wert als Anfangsaufgabe nach RUNGE-KUTTA durchgerechnet (Abb.25), mit folgenden Anfangswerten:

$$y_2(x_a) = \alpha_2 \quad \text{und} \quad y_2'(x_a) = z_2(x_a) = -\alpha_1 \quad . \tag{3.4}$$

Von Interesse sind nur die mit dem λ - Wert erreichten Daten $y_2(x_b)$ oder $y_2'(x_b) = z_2(x_b)$ am Intervallende x_b bzw. der Wert der entsprechenden Linearkombination

$$\beta_1 y_2(x_b) + \beta_2 z_2(x_b) = B \quad . \tag{3.5}$$

Bei der richtigen Wahl von λ wird B nach Voraussetzung (3.2) zu Null. Dieser Nulldurchgang der Linearkombination $B(\lambda)$ läßt sich mit der Regula falsi finden (Abb.26). Sie verläuft nach dem folgenden Rechnungsgang:
Aus der Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte B,

$$\Delta = B_n - B_{n+1} \quad , \tag{3.6}$$

errechnet sich der Zuwachs des Parameters λ

$$(\Delta\lambda)_{n+1} = \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta} B_{n+1} \tag{3.7}$$

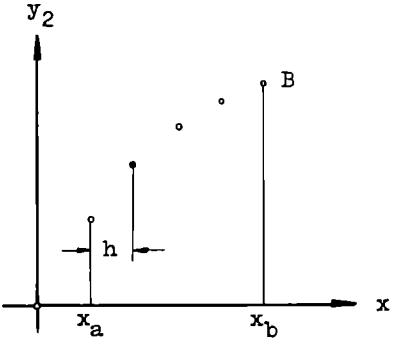


Abb. 25 Zur Lösung einer Eigenwertaufgabe

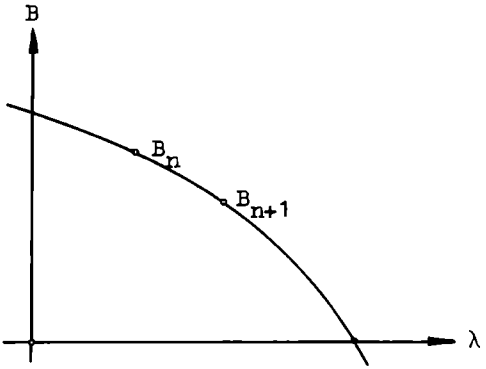


Abb. 26 Zur Lösung einer Eigenwertaufgabe

und damit der verbesserte λ - Wert

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\Delta\lambda)_{n+1} \qquad \text{usw.} \tag{3.8}$$

Der Startwert für λ und Δλ wird geschätzt, sowie der erste, in der Rechnung benötigte Wert B für n = 0, B_0 = 0 gesetzt. Die Rechnung muß durch die Vorgabe einer Genauigkeitsschranke für den Zuwachs Δλ begrenzt werden, z.B. auf vier Stellen nach dem Komma. Der so ermittelte Eigenwert λ ist aber nur eine mögliche Lösung. Weitere λ - Werte findet man mit anderen Startwerten.
Die Konvergenz der Regula falsi bei Eigenwertaufgaben ist sehr gut. Trotzdem kann eine Kontrollausgabe für λ oder Δλ im Programm vorteilhaft sein.

Programmablaufplan

An einen für den homogenen Fall vereinfachten Ablaufplan der Randwertaufgabe Abb.19 wird die Regula falsi angehängt und die Rechnung mit einer Genauigkeitsschranke abgeschlossen (Abb.27).

3.3 Beispiel. Schwingende Saite veränderlicher Stärke

Eine elastische Saite sei an den Enden eingespannt. Sie wird angezupft. Gesucht ist die Frequenz der Schwingung.

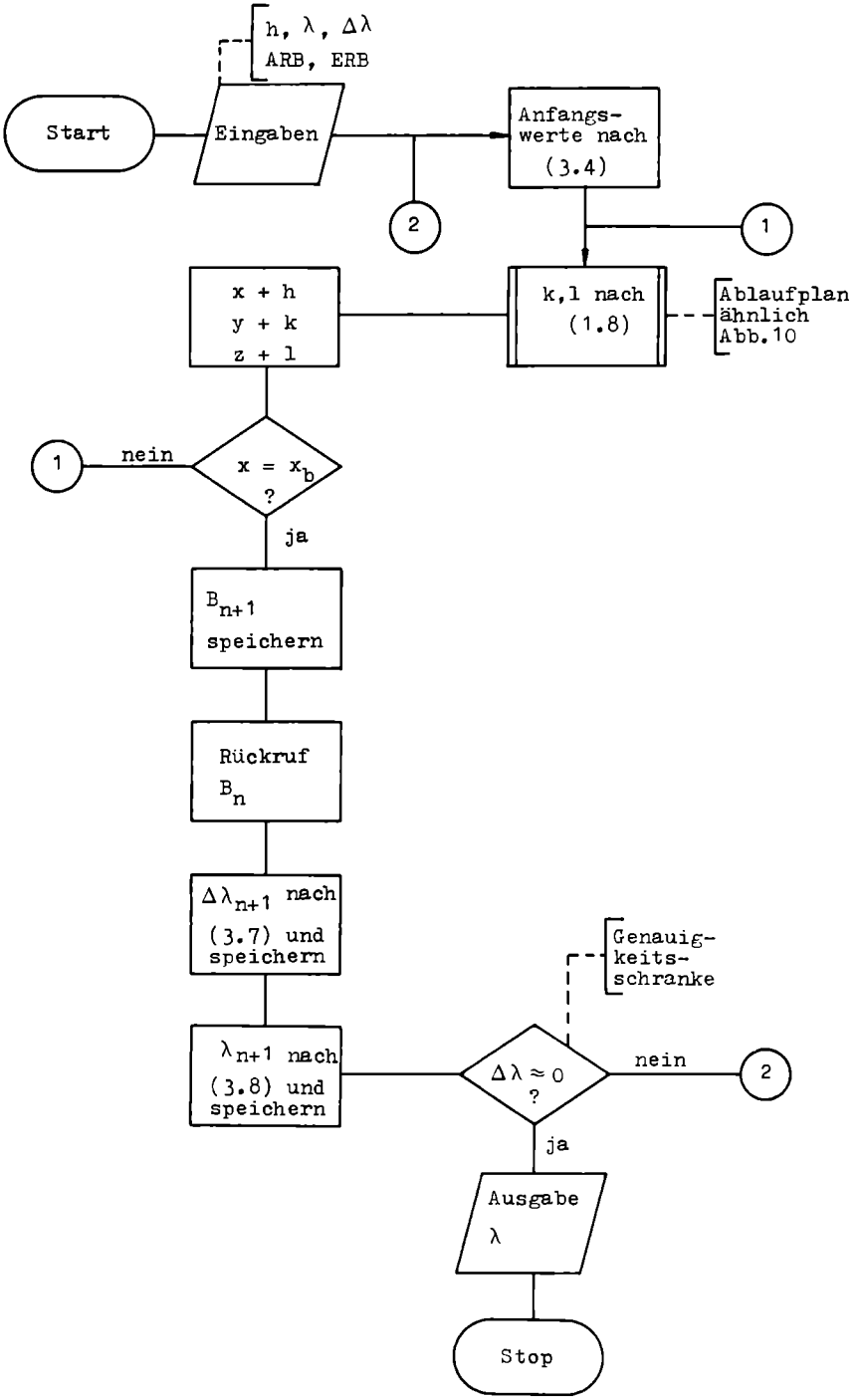


Abb. 27 Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Eigenwerten

Die zu lösende Differentialgleichung ist

$$S \cdot y'' + \lambda \cdot m(x) \cdot y = 0$$

Parameter $\lambda = \omega^2$, Seilzug S N, Winkelgeschwindigkeit ω $\frac{rad}{s}$,

Masse pro Längeneinheit m $\frac{Ns^2}{m^2}$.

Die Saite soll in der Mitte doppelt so stark als an den Rändern sein. Wir approximieren daher die Masse m durch die Funktion

$$m = m_o(1 + \sin \pi \frac{x}{x_b}) \quad .$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$y'' = - \lambda \frac{m_o}{S} \cdot (1 + \sin \pi \frac{x}{x_b}) \quad .$$

Die Berechnung des Parameters λ erfolgt mit den Zahlenwerten

$\frac{m_o}{S} = 3{,}24 \cdot 10^{-6} \ \frac{s^2}{m^2}$, $x_a = 0$ m , $x_b = 1$ m , Schrittweite

h = 0,1 m , den Randwerten

ARB $x_a = 0$ m, $y(x_a) = 0$ m ; also $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$,

ERB $x_b = 1$ m, $y(x_b) = 0$ m ; also $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$,

erster Schätzwert $\lambda = 10^7$, $\Delta\lambda = 10^6$, Genauigkeitsschranke eine Stelle nach dem Komma.

Ergebnis:

Parameter $\lambda = 7\ 242\ 293 = \omega^2$

Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = 428$ Hz

Das Ergebnis wurde mit dem folgenden Programm auf einem HP 67 gerechnet:

Hauptprogramm				Unterprogramme für f, g und B
LBL A	2	RCL 6	RCL 9	LBL B
RCL 1	STOx6	RCL 2	x⇄y	RCL C
STO A	x	+	STO 9	RTN

```
1          RCL 0      STO B      -          LBL C
-          STO+1      RCL 1      STO:8      RAD
x = 0      R↓         RCL 0      RCL 8      RCL A
SF 2       GSB 0      +          STO+7      π
RCL 2      STO-5      STO A      RND        x
STO B      RCL 6      GSB B      x ≠ 0      SIN
RCL 3      STO-4      RCL 0      GTO 2      1
STO C      3          x          RCL 7      +
F? 2       STO:4      STO 6      RTN        P↻S
GTO 1      STO:5      STO+4      LBL 2      RCL 1
GSB B      RCL 0      STO+4      0          P↻S
RCL 0      STO+1      GSB C      STO 1      x
x          RCL 4      RCL 0      RCL D      RCL B
STO 4      STO+2      x          STO 2      x
STO 6      RCL 5      STO+5      RCL E      RCL 7
GSB C      STO+3      STO+5      STO 3      x
RCL 0      GTO A      RTN        GTO A      CHS
x          LBL 0      LBL 1                 RTN
STO 5      RCL 3      GSB a                 LBL a
GSB 0      +          PAUSE                 RCL B
GSB 0      STO C      STOx8                 RTN
```

Die Regule falsi beginnt mit dem Programmschritt Nr. 69. Die Linearkombination B wird im Unterprogramm LBL a berechnet und zur Konvergenzkontrolle angezeigt. Die Genauigkeitsschranke entspricht dem eingestellten Anzeigeformat.

Speicherplan

	A	B	C	D	E
Wertepaare	x	y	z	α_2	$-\alpha_1$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	x_a	α_2	$-\alpha_1$	belegt	belegt	belegt	λ	$\Delta\lambda$	B_n

10	11	12 bis 19
frei	$\frac{m_0}{S}$	frei

3.4 Differentialgleichung vierter Ordnung

Für eine Differentialgleichung vierter Ordnung sind im homogenen Falle beide ARB und beide ERB Null:

1. ARB = 0 ; 2. ARB = 0 ; 1. ERB = 0 ; 2. ERB = 0 .

Der Lösungsansatz (2.8) reduziert sich auf

$$y(x) = K_2 \cdot y_2(x) + K_3 \cdot y_3(x) \quad . \tag{3.9}$$

Beschreibung des Verfahrens

Die homogene Differentialgleichung vierter Ordnung wird in der bekannten Weise in zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführt. Beide Gleichungen werden dann im Intervall $x_a \leqslant x \leqslant x_b$ zweimal mit der konstanten Schrittweite

$$h = \frac{x_b - x_a}{N} \quad , \qquad N \text{ ganze Zahl,}$$

und einem geschätzten λ - Wert als Anfangswertaufgabe nach RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM durchgerechnet.

Die erste Durchrechnung für die Teillösung y_2 erfolgt mit den Anfangswerten

$$1.\ ARB = 0 \ ; \quad 2.\ ARB = 0 \ ; \quad 1.\ AW = 1 \ ; \quad 2.\ AW = 0 \ . \tag{3.10}$$

Von Interesse sind nur die mit dem geschätzten λ - Wert am Intervallende x_b erreichten Daten b_{21} und b_{22} , der Funktionen, die durch die ERB gegeben sind.

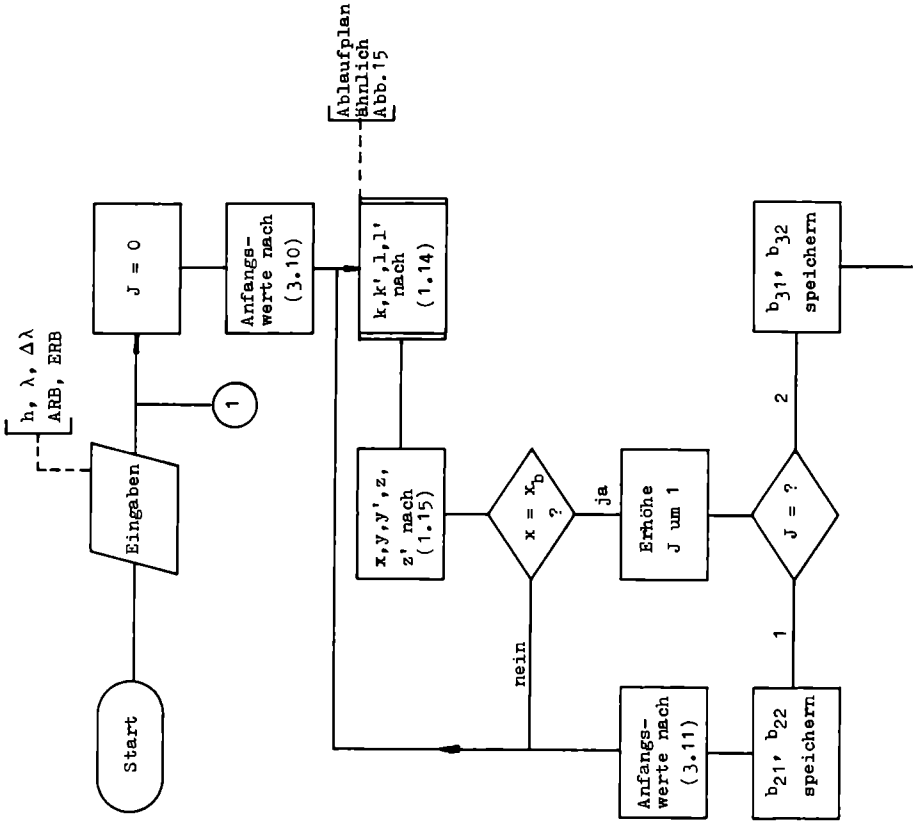
Die zweite Durchrechnung für die Teillösung y_3 erfolgt mit den Anfangswerten

$$1.\ ARB = 0 \ ; \quad 2.\ ARB = 0 \ ; \quad 1.\ AW = 0 \ ; \quad 2.\ AW = 1 \ . \tag{3.11}$$

Die am Intervallende interessierenden Daten seien b_{31} und b_{32} . Das Gleichungssystem zur Anpassung an die Forderung, beide ERB gleich Null, hat die beiden Unbekannten K_2 und K_3 :

$$b_{21} \cdot K_2 + b_{31} \cdot K_3 = 0$$

$$b_{22} \cdot K_2 + b_{32} \cdot K_3 = 0 \quad .$$



Um triviale Lösungen ($K_2 = K_3 = 0$) auszuschließen, muß die Hauptdeterminante zu Null werden

$$D = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} \\ b_{22} & b_{32} \end{vmatrix} = b_{21} \cdot b_{32} - b_{31} \cdot b_{22} = 0 \quad . \tag{3.13}$$

Dieser Nulldurchgang der Hauptdeterminante $D(\lambda)$ kann wieder mit der Regula falsi gefunden werden:

Aus der Differenz zweier aufeinanderfolgender Determinantenwerte

$$\Delta = D_n - D_{n+1} \tag{3.14}$$

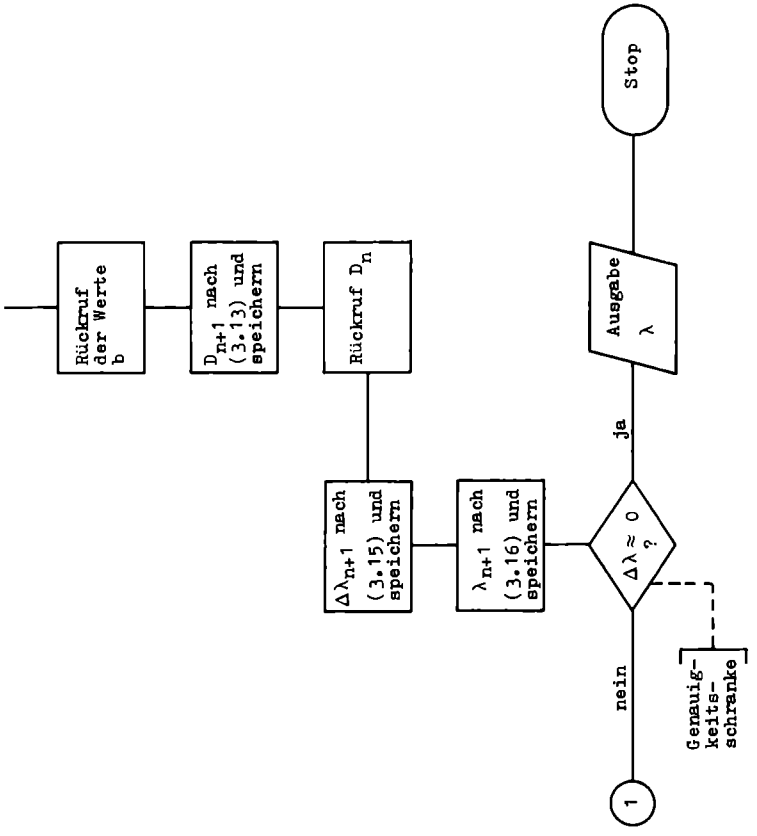


Abb. 28 Differentialgleichung vierter Ordnung mit Eigenwerten

errechnet sich der Zuwachs für den Parameter λ

$$(\Delta\lambda)_{n+1} = \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta} D_{n+1} \tag{3.15}$$

und damit der verbesserte λ - Wert

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\Delta\lambda)_{n+1} \qquad \text{usw.} \tag{3.16}$$

Der Startwert für λ und $\Delta\lambda$ wird geschätzt, der erste benötigte Wert D für $n = 0$, $D_0 = 0$ gesetzt. Die Rechnung wird durch eine Genauigkeitsschranke für den Zuwachs $\Delta\lambda$ begrenzt. Weitere λ - Werte, falls vorhanden, findet man durch die Vorgabe anderer Startwerte.

Programmablaufplan

An einen für den homogenen Fall vereinfachten Ablaufplan der früheren Randwertaufgabe Abb. 22 wird die Regula falsi angehängt und die Rechnung mit einer Genauigkeitsschranke abgeschlossen (Abb. 28).

3.5 Beispiel. Knickung eines Stabes unter seinem Eigengewicht

Wir betrachten ein Stabilitätsproblem. Ein senkrechter, unten eingespannter Stab konstanter Biegesteifigkeit EI werde in der Längsachse durch eine Kraft F belastet (Abb. 29). Die Suche nach der kritischen Last aus Kraft und Eigengewicht, bei der eine Knickung des Stabes eintritt, führt auf die homogene Differentialgleichung

$$EI \cdot y^{IV} = \left[G_o(l - x) \cdot y'\right]' - (F + G_o l) \cdot y'' \quad ,$$

mit dem Eigengewicht pro Längeneinheit des Stabes $G_o \ \frac{N}{m}$.

Wird die äußere Kraft F = 0 gesetzt, so geht die Gleichung nach kurzer Umformung über in

$$y^{IV} = -\lambda(x \cdot y'' + y') \quad ,$$

mit dem Parameter $\lambda = \frac{G_o}{EI}$ aus Eigengewicht und Biegesteifigkeit.

Dieses ist die mathematisch-physikalische Formulierung der Spruchweisheit, daß die Bäume nicht in den Himmel wachsen. Die Grenze des Wachstums gibt die Lösung der Eigenwertaufgabe an. Sie erfolgt für die Zahlenwerte $x_a = 0$ m, $x_b = 1$ m, Schrittweite h = 0,1 m, den Randbedingungen

1. ARB	$y(x_a) = 0$	1. AW	$y'(x_a)$
2. ARB	$z(x_a) = 0$	2. AW	$z'(x_a)$
1. ERB	$y'(x_b) = 0$		
2. ERB	$z'(x_b) = 0$		

erster Schätzwert $\lambda = 10$ und $\Delta\lambda = 1$.

Ergebnis $\lambda = 7{,}8377$. Weitere Durchrechnung mit anderen Stablängen $l = x_b$ führt zu der Gleichung

$$\frac{G_o l^3}{EI} = 7{,}8377 \quad .$$

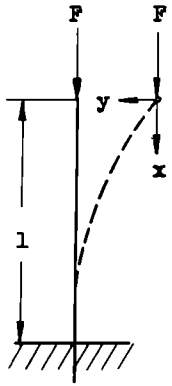


Abb. 29
Knickung eines Stabes

Gerechnet wurde mit dem folgenden Programm auf einem HP 67:

Hauptprogramm

```
LBL A
RCL 0
RCL 3
RCL 4
P⇄S
STO 2
STO D
R↓
STO 1
STO C
R↓
STO 0
LBL a
0
STO 4
STO 5
P⇄S
STO 4
STO 5
RCL E
RCL 6
-
x = 0
SF 2
RCL 2
STO B
RCL 1
STO A
F? 2
GTO 5
SF 0
GSB B
GSB 0
GSB C
GSB 0
GSB 1
STO D
1
GSB 2
STO C
P⇄S
GSB 1
STO B
1
GSB 4
GSB B
GSB 0
STO+5
GSB C
GSB 0
STO+5
GSB 1
STO D
P⇄S
GSB 1
STO B
GSB B
GSB 0
STO+3
STO+5
GSB 1
STO D
2
GSB 2
STO C
P⇄S
GSB 1
STO B
2
GSB 4
CF 0
GSB B
GSB 0
GSB C
GSB 0
GSB 3
RCL 2
STO D
RCL 1
STO C
P⇄S
GSB 3
P⇄S
GTO a
LBL 0
RCL 0
x
STO 3
F? 0
STO+4
STO+5
RTN
LBL 1
RCL 2
RCL 3
+
RTN
LBL 2
x⇄y
RCL 3
2
:
-
x
RCL 0
x
RCL 1
+
RTN
LBL 3
3
STO:4
STO:5
RCL 5
RCL 2
+
STO 2
LASTX
RCL 4
+
RCL 0
x
2
x
STO+1
RTN
LBL 4
GSB 2
STO A
RCL 0
RCL E
+
STO E
RTN
LBL 5
P⇄S
DSZ
GTO 6
RCL D
RCL 6
x
RCL B
RCL 7
x
-
-X-
STOx8
RCL 9
x⇄y
STO 9
-
STO:8
RCL 8
P⇄S
STO+7
RND
x ≠ 0
GTO D
RCL 7
RTN
LBL D
0
STO E
STO 1
STO 3
STO 4
1
STO 2
2
ST I
GTO A
LBL 6
RCL B
STO 6
RCL D
STO 7
P⇄S
0
STO E
STO 1
STO 3
STO 2
1
STO 4
GTO A
```

Unterprogramme für f und g

```
LBL B
RCL C
RTN

LBL C
RCL E
RCL C
x
RCL B
+
RCL 7
x
CHS
P⇄S
RTN
```

Die erste Durchrechnung der Differentialgleichung beginnt beim Programmschritt Nr. 165 (LBL D), die zweite bei Nr. 181 und die Regula falsi bei Nr. 161. Die Determinante D wird unter LBL 5 berechnet und zur Konvergenzkontrolle angezeigt. Die Genauigkeitsschranke entspricht dem eingestellten Anzeigeformat.

Speicherplan

Die interessierenden Daten am Intervallende x_b werden im Hauptprogramm abgefragt

1. ERB: Nr. 146 und Nr. 177
2. ERB: Nr. 143 und Nr. 179 .

Die Anfangsbedingungen für die erste Durchrechnung sind im Programm die Nr. 165 bis 174 , für die zweite Durchrechnung die Nr. 182 bis 188. Das Programm sollte bei LBL D (Nr. 165) gestartet werden. Im Register I für die indirekte Steuerung ist die Zahl 2 zu speichern.

		A	B	C	D	E	I		
Wertepaare		y	y'	z	z'	x	2		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{h}{2}$	$y(x_a)$	$y'(x_a)$	$z(x_a)$	$z'(x_a)$	belegt	x_b	λ	frei	frei
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	belegt	b_{21}	b_{22}	$\Delta\lambda$	D_n

Teil B

Partielle Differentialgleichungen

4. Einführung, Gitterpunktmethode

Fast noch zahlreicher als für gewöhnliche Differentialgleichungen sind die Anwendungsgebiete der partiellen Differentialgleichungen. Durch die Möglichkeit, sie auf Rechenautomaten zu lösen, gewinnen sie in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung für alle Ingenieurwissenschaften. Auch programmierbare Taschenrechner sind zur Lösung geeignet. Die folgenden Kapitel sollen daher den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gehören. Ihre Typenbezeichnungen erhalten sie nach wichtigen technisch-physikalischen Anwendungsgebieten:

Wärmeleitung	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$
Wellengleichung	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
Telegraphengleichung (Wanderwelle)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
Stromverdrängung (Skineffekt)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$
Membranschwingung	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
Poissonsche - , Potentialgleichung	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$

Bei zwei unabhängigen Veränderlichen x und y bzw. x und t wird als Lösung eine Funktion u gesucht, eine Fläche im x t u- Koordinatensystem, die die Differentialgleichung erfüllt und zusätzlich vorgegebene Anfangs- und Randwerte einhält (Abb.30). Bei drei unabhängigen Veränderlichen muß die gesuchte Lösung einen Raum im x y t u- Koordinatensystem umfassen. Was Wunder, daß die Theorie

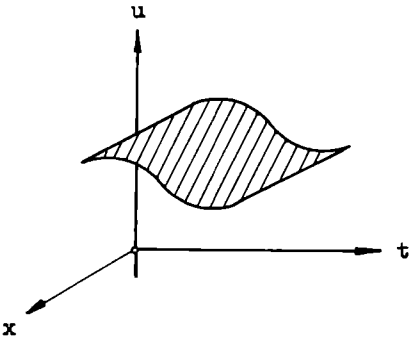


Abb. 30 Fläche als Lösung einer partiellen Differentialgleichung

der partiellen Differentialgleichungen zu den schwierigen Kapiteln der Mathematik gerechnet wird. Vor diesem Hintergrunde hebt sich die Gitterpunktmethode (Differenzenverfahren) als eine einfache, numerische Näherungslösung wohltuend ab. Das Verfahren ist seit langem bekannt. Es geht auf Leonhard Euler (1707 bis 1783) zurück und ist auch auf programmierbaren Taschenrechnern leicht zu realisieren. Heute zählt es zu den wirkungsvollen Lösungsmethoden, nicht nur für partielle Differentialgleichungen, sondern auch für nichtlineare Aufgaben der mathematischen Physik. Die Grundgedanken der Gitterpunktmethode sind:

Das Gebiet, in dem man die Lösung u sucht, wird mit einem regelmäßigen Punktegitter überzogen, welches aus gleichen, meist rechteckigen oder quadratischen Zellen besteht (Abb.31).

Die vorliegende partielle Differentialgleichung wird in den Gitterpunkten durch eine Differenzengleichung ersetzt.

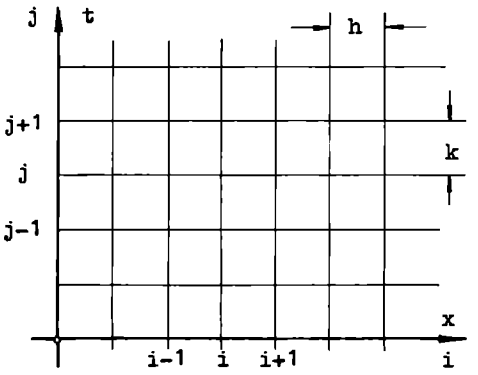


Abb. 31 Gitterpunktmethode

Aus dem Differenzenansatz entsteht ein (lineares) Gleichungssystem, dessen Lösung näherungsweise den jeweiligen Wert der Funktion u in den einzelnen Gitterpunkten angibt. Vielfach erhält man eine sehr einfach aufgebaute Rekursionsformel, in der ein einzelner noch unbekannter u-Wert mehreren bereits bekannten gegenübersteht. Durch wiederholtes Anwenden dieser Rekursionsformel lassen sich die u-Werte in allen Gitterpunkten finden. Eine solche mechanische Wiederholung gleichartiger Rechenzyklen führt aber zu einfachen und kurzen Rechenprogrammen, wie es Taschenrechner erfordern.

Für die Güte der Näherung ist es wichtig, wie der Differentialquotient durch einen Differenzenquotienten ersetzt wird. Man sollte, wenn möglich, nur zentrale Differenzenformeln benutzen. Das sind Formeln, in denen die Tangentenneigung in einem Gitterpunkt P durch die Steigung der Sehne zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten ersetzt wird (Abb.32). Die richtige Wahl der Schrittweite h ist, wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen, von zentraler Bedeutung. Der Gitterpunkt P habe die Koordinaten

$$x = i \cdot h$$

$$t = j \cdot k \quad ,$$

die beiden benachbarten Punkte

$$x + h = (i+1) \cdot h \qquad \text{und} \qquad x - h = (i-1) \cdot h$$

$$t + k = (j+1) \cdot k \qquad \text{und} \qquad t - k = (j-1) \cdot k$$

und der Funktionswert im Punkte P sei $u_{i,j}$.

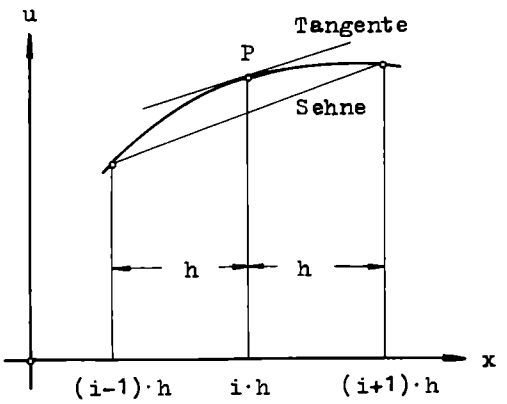


Abb. 32 Tangente und Sehne bei Zentralformeln

Dann wird für das Gitterpunktverfahren ersetzt die erste Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

mit einem Fehler von der Ordnung h^2 bzw. k^2 ,

die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2\cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2\cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

mit einem Fehler von der Ordnung h^2 bzw. k^2 ,

eine gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\cdot hk}$$

mit einem Fehler von der Ordnung $(h+k)^2$.

Schwierigkeiten können bei der mathematischen Formulierung der Anfangs- und Randbedingungen auftreten, weil die Zentralformeln an den Rändern u-Werte "jenseits" des Anfangs oder des Randes fordern. Sind diese u-Werte nicht bekannt, so ersetze man den Differentialquotienten durch eine "einseitige" Differenzenformel

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad .$$

Dieses ist z.B. der Fall bei der Differentialgleichung vom Typ "Wärmeleitung" und "Stromverdrängung".

5. Wärmeleitung

5.1 Problemstellung und Lösungsweg

Die Betrachtung einer gedämpften, zeitlichen Energieströmung in nur einer Richtung führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad . \tag{5.1}$$

Ihre wichtige technische Anwendung ist die Wärmeleitung. Hier wird u zur Temperaturerhöhung, die vom Ort x und der Zeit t abhängt. a ist eine Materialkonstante aus Materialdichte ρ , spezifische Wärmekapazität c und Wärmeleitvermögen λ:

$$a = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \quad .$$

<u>Beschreibung des Verfahrens</u>

Die Differentialgleichung wird zunächst durch die Substitution

$$t = a \cdot \tau \tag{5.2}$$

vereinfacht:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad . \tag{5.3}$$

Dann ersetzt man, wie im Kapitel 4 beschrieben, die beiden Differentialquotienten durch Differenzenquotienten. Meist ist aber die Temperaturverteilung nur zu Beginn (t = 0) der Wärmeströmung

bekannt, nicht aber auch noch davor. So ersetzen wir $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ durch eine "einseitige" Differenzenformel

$$\frac{u_{i+1,j} - 2\cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$x = i\cdot h$$

$$\tau = j\cdot k \quad .$$

Wählt man die Abmessungen der Gitterzelle h und k nicht unabhängig voneinander, sondern setzt

$$k = n\cdot h^2 \quad , \tag{5.4}$$

so ergibt sich in den Gitterpunkten die einfache Beziehung

$$u_{i,j+1} = n\,(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2\cdot u_{i,j}) + u_{i,j} \quad . \tag{5.5}$$

Diese Rekursionsformel ist eine Gleichung zwischen der unbekannten Temperaturerhöhung $u_{i,j+1}$ im Gitterpunkt i der Zeitzeile j+1 und drei bekannten Temperaturerhöhungen aus der Zeitzeile j. Die Abb. 33 soll die Rekursionsformel veranschaulichen. Der unbekannte u-Wert ist durch einen leeren Kreis, die bekannten sind durch volle Kreise gekennzeichnet. Die wiederholte Anwendung der Rekursion ergibt die Temperaturerhöhung in allen Gitterpunkten der Zeitzeile j+1 im betrachteten Gebiet von i = 0 bis i = 1 ;

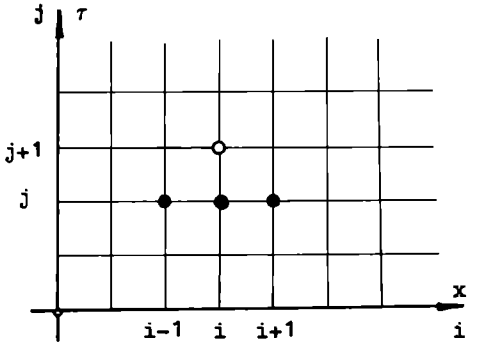


Abb. 33 Rekursion: Gleichung (5.5)

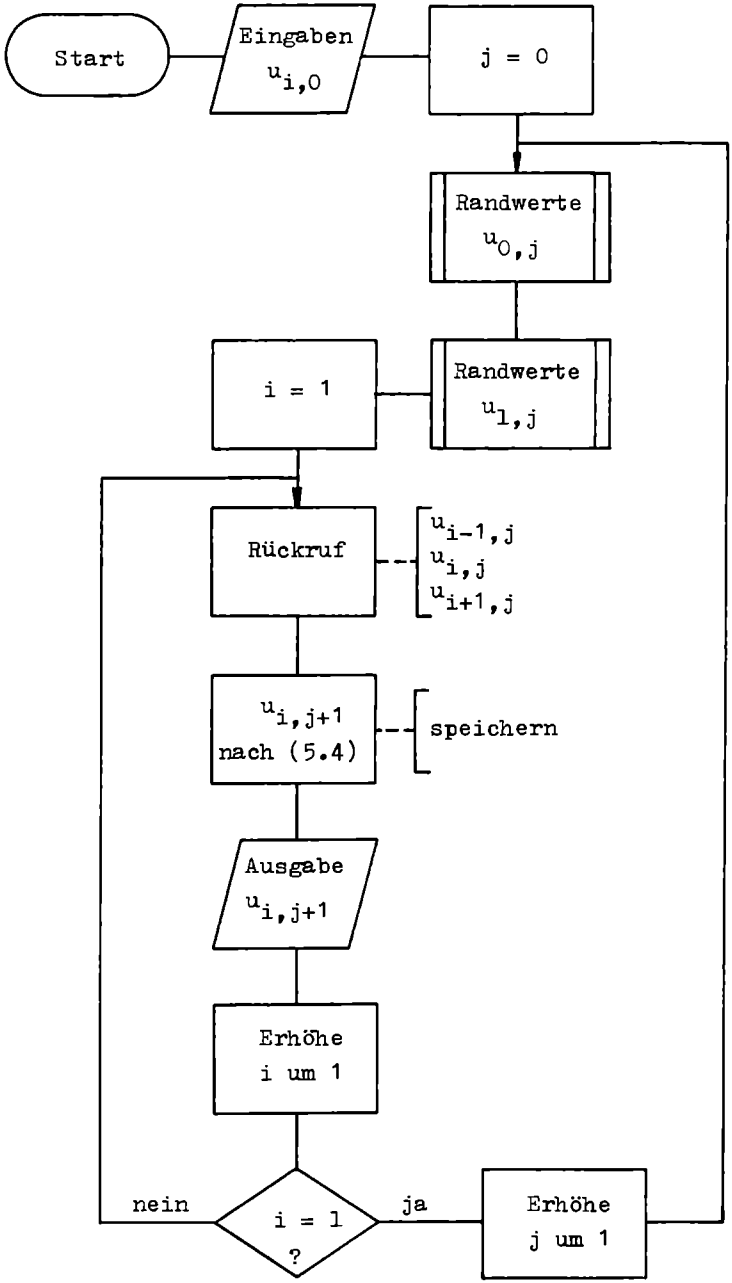


Abb. 34 Wärmeleitung

anschließend in den Gitterpunkten der Zeitzeile j+2 usw. Genauere Untersuchungen zeigen aber, daß dieses einfache Verfahren nur dann numerisch stabil bleibt, wenn

$$n \leqslant 0{,}5$$

ist. Nur dann schaukeln sich unvermeidbare Rundungsfehler mit zunehmender Rechenlänge nicht auf, sondern bleiben klein oder klingen sogar ab. Andernfalls würde die Rechnung sehr schnell zu falschen Ergebnissen führen. Wählt man $n = \frac{1}{6}$, so wird der Fehler für die Gleichung (5.5) am kleinsten, nämlich von der Ordnung h^4!

Programmablaufplan

Der Programmablaufplan (Abb.34) hat einen denkbar einfachen Aufbau. Zu Beginn der Rechnung wird die bekannte Temperaturverteilung der Zeitzeile $j = 0$ eingegeben. Die Temperaturen an den Rändern, $x = 0$ und $x = L$ ($i = 0$ und $i = 1$), müssen für alle kommenden j- Zeilen angebbar sein. Falls sie nicht konstant sind, erfolgt ihre Berechnung in Unterprogrammen. Die Temperaturerhöhungen u zweier aufeinanderfolgender j- Zeilen müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Dabei dürfen erst die Daten der Zeile j+1 die Datenspeicher der Zeile j-1 überschreiben.

5.2 Beispiel. Erwärmung der Bremstrommel eines Pkw beim Anhalten

Die Erwärmung einer Bremstrommel (Abb.35) soll für eine Vollbremsung berechnet werden.
Geht man davon aus, daß die an den Bremsbelägen erzeugte Wärme radial in die zylindrische Trommel eindringt, so gilt für die Temperaturerhöhung u angenähert die Differentialgleichung (5.1). Ferner soll die Trommel die erzeugte Wärme stets aufnehmen können. Dieses führt zu der Randbedingung

$$x = 0 \qquad -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = q = q_0\left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad . \qquad (5.6)$$

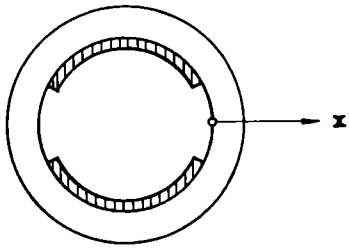


Abb. 35 Bremstrommel

q (W/cm^2) ist die Leistungsdichte an den Bremsbelägen, die, wie die Geschwindigkeit des Wagens, während der Bremsdauer T linear mit der Zeit t abnimmt. Außen, im radialen Abstand x = L , sei die Temperaturerhöhung auf Null abgesunken:

$$x = L \qquad u = 0 \quad . \tag{5.7}$$

Als Anfangsbedingung wird für die Bremstrommel

$$t = 0 \qquad u = 0 \tag{5.8}$$

gesetzt.

Die Rechnung erfolgt mit den Zahlenwerten

Gewichtskraft des PkW	G =	14 568	N
Geschwindigkeit	v =	36	$\frac{m}{s}$
Bremsverzögerung	b =	9	$\frac{m}{s^2}$
Bremstrommel:			
Innendurchmesser	D =	28	cm
Breite	d =	3	cm
Materialkonstante	a =	4,9	$\frac{s}{cm^2}$
Wärmeleitwert	λ =	0,67	$\frac{W}{cm\ ^oC}$

Zunächst errechnen wir die Bremsdauer bis zum Stillstand

$$T = \frac{v}{b} = 4{,}0 \quad s$$

und den Bremsweg

$$s = \frac{1}{2}\cdot v\cdot T = 72 \quad m \; .$$

Die kinetische Energie des Wagens ist

$$W = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{14\;568}{9{,}81}\cdot 36^2 = 962\;290 \quad J$$

und die auf ihn wirkende Bremskraft

$$F = \frac{W}{s} = \frac{962\;290}{72} = 13\;365 \quad N \; .$$

Damit beträgt die Bremsleistung zu Beginn der Bremsung für alle vier Bremstrommeln

$$P_o = F\cdot v = 13\;365\cdot 36 = 481\;145 \quad W \; ,$$

und so erhalten wir bei einer Bremstrommelfläche von

$$A = \pi\cdot D\cdot d = 263{,}9 \quad cm^2$$

die anfängliche Leistungsdichte pro Bremstrommel

$$q_o = \frac{481\;145}{4\cdot 263{,}9} = 455{,}8 \quad \frac{W}{cm^2} \; .$$

In x- Richtung wählen wir ein Gitter mit acht Punkten, bei einer Schrittweite h = 0,35 cm; für $n = \frac{1}{6}$ wird dann nach (5.4)

$$k = 0{,}0204 \quad cm^2 \; .$$

In der Randbedingung (5.6) wird die erste Ableitung durch eine Zentralformel ersetzt und die Substitution $t = a\cdot\tau$ ($\tau = j\cdot k$) berücksichtigt

$$\frac{u_{0+1,j} - u_{0-1,j}}{2h} = -\frac{q_o}{\lambda}\left(1 - \frac{a\cdot j\cdot k}{T}\right) \; .$$

Nach $u_{0-1,j}$ aufgelöst, schreibt sich schließlich die Randbedingung

$$u_{0-1,j} = u_{0+1,j} + \frac{2h \cdot q_o}{\lambda} \left(1 - \frac{a \cdot k}{T} j\right)$$

$$= u_{0+1,j} + 476{,}2 \cdot \left(1 - \frac{j}{40}\right) .$$

$j = 40$ entspricht der Bremsdauer $T = 4$ s .
Die zweite Randbedingung für $i = 1$ und die Anfangsbedingungen für $t = 0$ sind nach (5.7) und (5.8) $u = 0$.

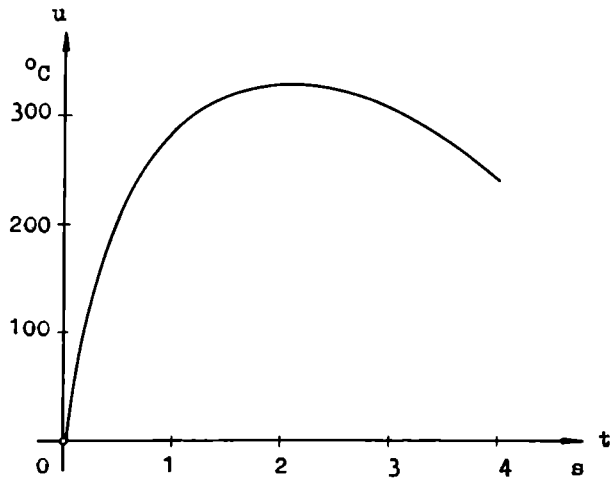


Abb. 36 Erwärmung einer Bremstrommel

Das Ergebnis an der Stelle $x = 0$ zeigt die Abb. 36. Hier, an den Bremsbelägen, erreicht die Temperaturerhöhung den Höchstwert von 330 °C nach der halben Bremszeit, d.h. nach zwei Sekunden! Am Ende der Bremsperiode ist die Erhöhung wieder auf 245 °C abgesunken.
Der Temperaturverlauf wurde mit dem folgenden Programm auf einem HP 67 gerechnet, wobei sich die Ausgabe u auf die Stelle $x = 0$ beschränkte.

Hauptprogramm

```
LBL A      RCL(i)
RCL E      -
1          RCL(i)
+          -
STO E      6
PAUSE      :
0          RCL(i)
ST I       +
GSB a      P⟲S
STO 0      STO(i)
GSB b      GSB 2
STO 9      P⟲S
LBL 1      RC I
RCL(i)     8
ISZ        x ≠ y
ISZ        GTO 1
RCL(i)     P⟲S
+          GTO A
DSZ
```

Ausgabe

```
LBL 2
RC I
1
x ≠ y
RTN
RCL(i)
-X-
RTN
```

Unterprogramme f. die Ränder x=0 und x=L

```
LBL a
1
RCL E
1
-
RCL B
:
-
RCL A
x
RCL 2
+
RTN

LBL b
0
RTN
```

Das Voranschreiten von j zu j+1 in den Datenspeichern erfolgt auf einfache Weise durch den jeweiligen Austausch von Primär- und Sekundärspeichern: P⟲S !

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
476,2	40	frei	frei	Zähler j Beginn: 0	Zähler i

	x=0								x=L	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zeitzeile j
u_{0-1}	u_0	u_{0+1}						u_{1-1}	u_1	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Zeitzeile j+1

Die Anfangswerte für die Zeile j = 0 nach (5.8) sind in die Speicher 1 bis 9 einzugeben.

6. Wellengleichung

6.1 Problemstellung und Lösungsweg

Ein elastischer Stab der Länge L ist an seinem einen Ende fest eingespannt. Er wird am anderen Ende ein kleines Stück gelängt und losgelassen. Mit Ausnahme der Einspannstelle werden dann alle Punkte Schwingungsbewegungen ausführen, die in Form einer Welle längs des Stabes ablaufen. Die Elastizitätstheorie liefert für die Auslenkung u eines Punktes aus seiner Ruhelage in x- Richtung (Stab-Achse) die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad . \tag{6.1}$$

Aus $\quad b^2 = \frac{m}{E \cdot A} \quad \frac{s^2}{m^2}$

mit Masse pro Längeneinheit m , Elastizitätsmodul E und Querschnitt A errechnet sich die Wellengeschwindigkeit für elastische Längswellen:

$$v = \frac{1}{b} \quad \frac{m}{s} \; .$$

Auch die Schwingung einer elastischen Saite, die zwischen zwei Punkten eingespannt ist, führt auf die gleiche partielle Differentialgleichung. Jetzt ist aber u die Auslenkung senkrecht zur Saite und

$$b^2 = \frac{m}{S} \quad \frac{s^2}{m^2}$$

mit dem Saitenzug S .

Beschreibung des Verfahrens

Die beiden Differentialquotienten in (6.1) werden durch Zentralformeln ersetzt:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2\cdot u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = b^2 \frac{u_{i,j+1} - 2\cdot u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

$$x = i\cdot h$$

$$t = j\cdot k \quad .$$

Die Abmessungen der Gitterzelle h und k sollen wieder nicht unabhängig voneinander sein. Die Beziehung

$$n = \left(\frac{k}{b\cdot h}\right)^2 \tag{6.2}$$

führt zu der Rekursionsformel

$$u_{i,j+1} = n\cdot(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2\cdot(1-n)u_{i,j} - u_{i,j-1} \ , \tag{6.3}$$

die aber nur für

$$n \leqslant 1$$

numerisch stabil ist. Wählt man das Gleichheitszeichen, so wird die Rekursionsformel besonders einfach:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad . \tag{6.4}$$

Dem unbekannten Wert $u_{i,j+1}$ stehen drei bekannte Werte aus der Zeitzeile j und j-1 gegenüber. Die Abb. 37 soll dieses veranschaulichen.

Die Lösung u ist eine periodische Funktion. Nach einer gewissen Anzahl von Zeitschritten j_T wiederholen sich die u-Werte, und die Eigenfrequenz der Schwingung läßt sich errechnen:

$$f = \frac{1}{j_T\cdot k} \quad \text{Hz} \ . \tag{6.5}$$

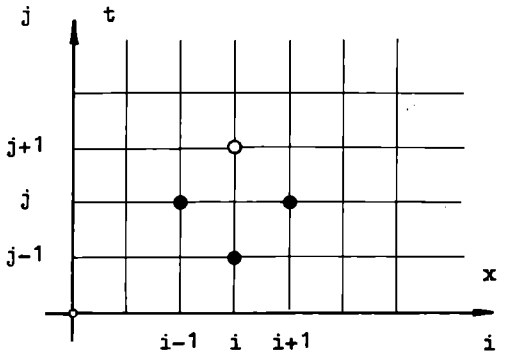


Abb. 37 Rekursion: Gleichung (6.4)

Bei einer Saite schwingen alle Punkte synchron und phasengleich, d.h. alle Punkte erreichen zur gleichen Zeit ihren Maximalausschlag und gehen zur gleichen Zeit durch ihre Ruhelage. Dann darf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot u$$

gesetzt werden, und die partielle Differentialgleichung geht in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Eigenwerten über.

Programmablaufplan

Zu Beginn der Rechnung (Abb.38) werden die Anfangswerte der beiden Zeitzeilen $j = 0$ und $j = 1$ eingegeben. Diese können z.B. aus "Auslenken" und "Loslassen" bestehen. Eine vorgegebene Auslenkung liefert alle u- Werte der Zeitzeile $j = 0$; "Loslassen" bedeutet, daß die Rückschwinggeschwindigkeit im ersten Moment noch Null ist,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

oder, nach dem Ersatz der Ableitung durch eine Zentralformel,

$$u_{i,0+1} = u_{i,0-1} \quad .$$

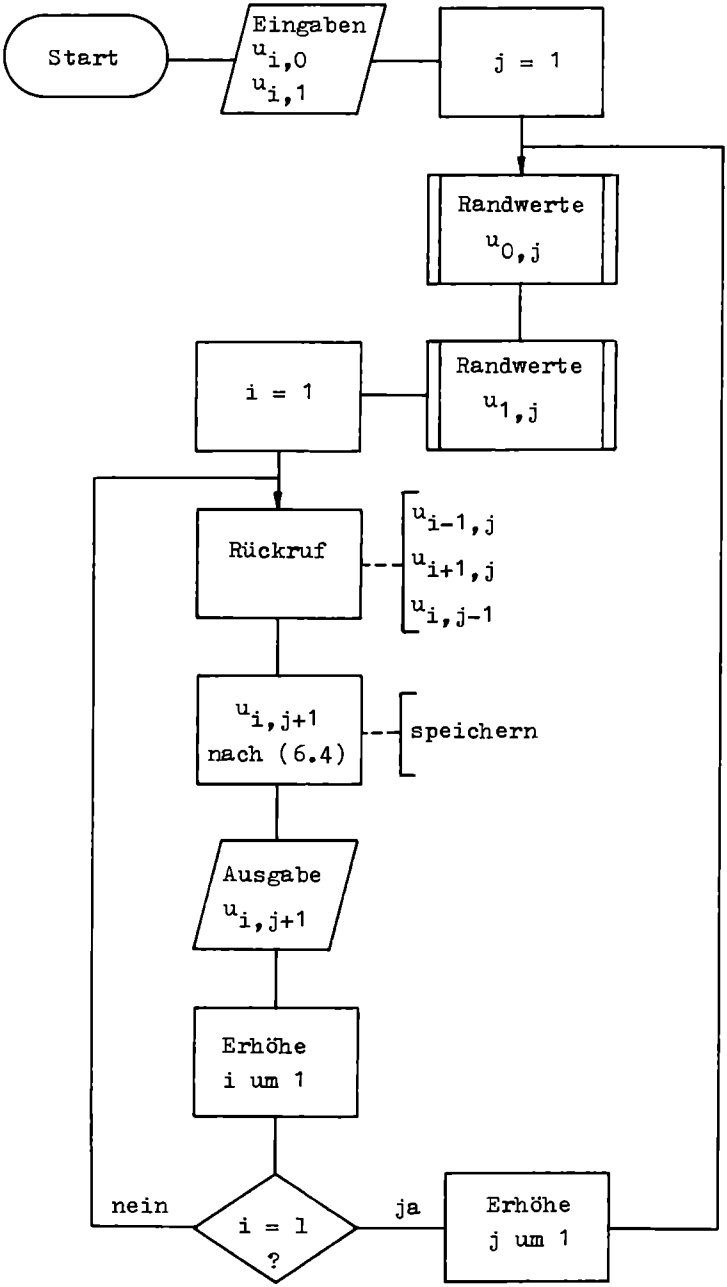


Abb. 38 Wellengleichung

Nimmt man noch die Gleichung (6.4) hinzu, so sind die u- Werte der Zeitzeile j = 1

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) \quad . \tag{6.6}$$

Die Auslenkungen an den beiden Rändern x = 0 und x = L müssen für alle kommenden j- Zeilen angebbar sein. Die Berechnung kann in Unterprogrammen erfolgen. Die Auslenkung u zweier aufeinanderfolgender j- Zeilen müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Dabei darf erst die Zeile j+1 die Zeile j-1 in den Datenspeichern überschreiben.

6.2 Beispiel. Träger mit Rammbär, Kompressionswelle

Ein senkrechter Träger (Abb.39) ist am unteren Ende (x = 0) unbeweglich gelagert. Auf das obere Ende (x = L) fällt ein Rammbär (Masse M) mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s} \quad .$$

Rammbär und Träger sollen vom Auftreffmoment an miteinander verbunden bleiben, d.h. Prellerscheinungen finden nicht statt. Für die Auslenkung u eines Trägerpunktes aus seiner Ruhelage gilt die Differentialgleichung (6.1) mit den Randbedingungen

$$x = 0 \qquad u = 0 \tag{6.6}$$

$$x = L \qquad -\frac{\partial u}{\partial x} = b_o^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ; \quad b_o^2 = \frac{M}{E \cdot A} \tag{6.7}$$

und den Anfangsbedingungen

$$t = 0 \text{ und } x \neq L \qquad u = 0 \tag{6.8}$$

$$t = 0 \text{ und } x = L \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \quad . \tag{6.9}$$

Die Rechnung erfolgt für einen vier Meter langen Träger NP I 20

Masse pro Längeneinheit $m = 26{,}81 \quad \frac{Ns^2}{m^2}$

$E \cdot A = 7 \cdot 10^8 \quad N$

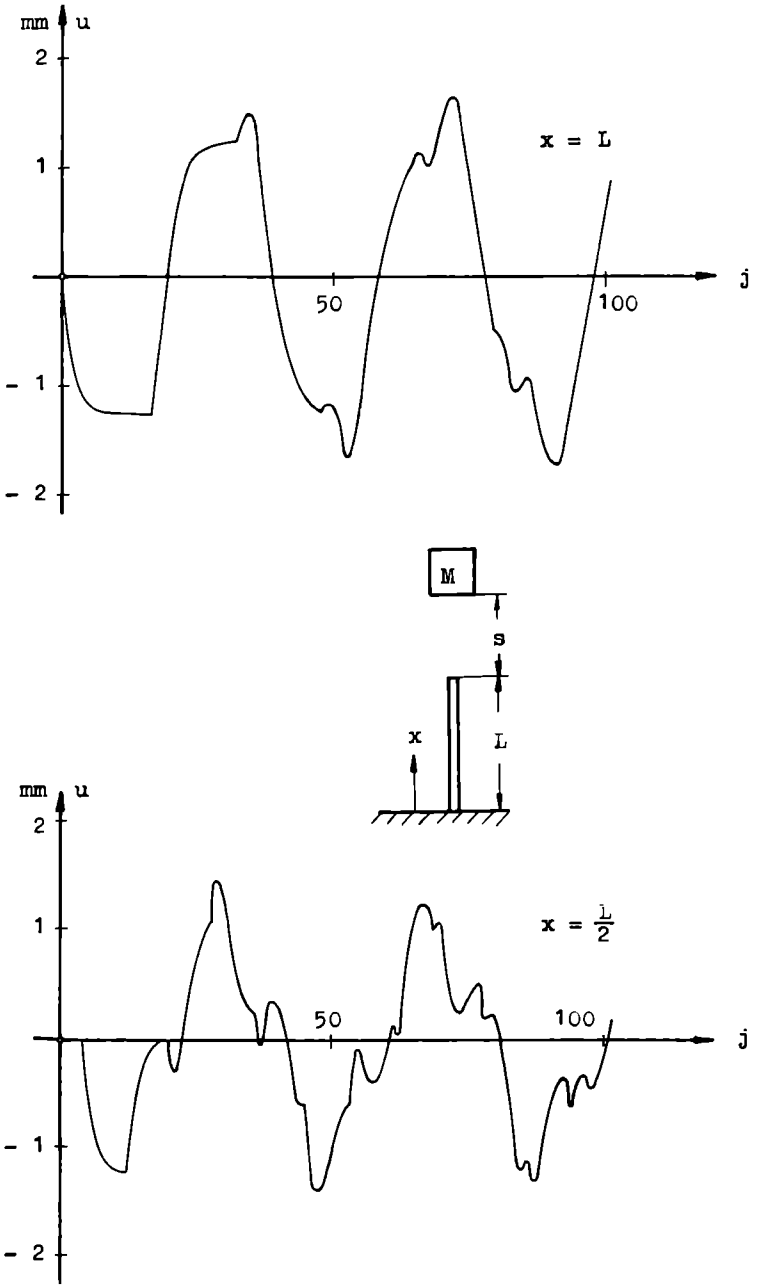


Abb. 39 Kompressionswelle in einem Träger

Rammbärmasse $M = 25{,}48 \quad \frac{Ns^2}{m}$

Fallhöhe $s = 1{,}5 \quad m$.

Zunächst errechnen wir die Auftreffgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5} = 5{,}42 \quad \frac{m}{s} .$$

Dann wählen wir ein Gitter mit acht Punkten in x- Richtung und einer Schrittweite $h = 0{,}5$ m. Das ergibt nach (6.2)

$$k = h \cdot b = 0{,}5 \cdot \frac{26{,}81}{7 \cdot 10^8} = 9{,}8 \cdot 10^{-5} \quad s .$$

In der Randbedingung (6.7) werden die Ableitungen durch Zentralformeln ersetzt und $k = h \cdot b$ berücksichtigt:

$$-\frac{u_{l+1,j} - u_{l-1,j}}{2h} = \left(\frac{b_o}{b}\right)^2 \cdot \frac{u_{l,j+1} - 2\, u_{i,j} + u_{l,j-1}}{h^2} .$$

Die Rekursionsformel (6.4) an der Stelle $i = l$

$$u_{l,j+1} = u_{l+1,j} + u_{l-1,j} - u_{l,j-1} \tag{6.10}$$

liefert die zweite Gleichung für die beiden Unbekannten $u_{l+1,j}$ und $u_{l,j+1}$. Nach $u_{l+1,j}$ ausgerechnet, schreiben sich die Randbedingungen

$$(A+1)u_{l+1,j} = 2 \cdot u_{l,j} + (A-1)u_{l-1,j}$$

$$A = \left(\frac{b}{b_o}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{m}{M} \cdot \frac{h}{2} = 0{,}263$$

und nach (6.6)

$$u_{0,j} = 0 .$$

Auch in der Anfangsbedingung (6.9) wird die Ableitung durch eine Zentralformel ersetzt:

$$\frac{u_{l,0+1} - u_{l,0-1}}{2k} = -v .$$

Die Rekursionsformel (6.10) an der Stelle $i = 1$ liefert, unter Beachtung, daß für alle $x \neq L$ nach (6.8) $u = 0$ ist,

$$u_{1,0+1} = 0 + 0 - u_{1,0-1} \quad .$$

Damit schreiben sich die Anfangswerte der beiden Zeitzeilen

$$j = 0 \quad \text{und} \quad i \neq 1 \qquad u_{i,0} = 0 \quad \text{mm} \tag{6.11}$$

$$i = 1 \qquad u_{1,0} = 0 \quad \text{mm}$$

$$j = 1 \quad \text{und} \quad i \neq 1 \qquad u_{i,1} = 0 \quad \text{mm} \tag{6.12}$$

$$i = 1 \qquad u_{1,1} = -\,kv = -\,0{,}53 \quad \text{mm} \; .$$

Die errechnete Schwingung des Trägers an der Stelle $x = L$ und $x = \frac{L}{2}$ zeigt die Abb. 39. Es ist das Bild einer Welle, die an den beiden Trägerenden jeweils reflektiert wird. An der Stelle $x = L$ entnehmen wir als Schwingungsweite $j_T = 39$ und finden damit die Frequenz nach (6.5) $f = 262$ Hz .

Die Rechnung erfolgte auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm, wobei die Ausgabe u sich auf die Stellen $x = L/2$ und $x = L$ beschränkte.

Hauptprogramm

```
LBL A
RCL E
1
+
STO E
PAUSE
0
ST I
GSB a
STO 0
GSB b
STO 9
LBL 1
RCL(i)
ISZ
ISZ
RCL(i)
+
DSZ
P↔S
RCL(i)
-
STO(i)
GSB 2
P↔S
RC I
8
x ≠ y
GTO 1
P↔S
GTO A
```

Ausgabe

```
LBL 2
RC I
4
:
FRAC
x ≠ 0
RTN
RC I
PAUSE
RCL(i)
-X-
RTN
```

Unterprogramme f. die Ränder x=0 und x=L

```
LBL a
0
RTN

LBL b
RCL 7
RCL A
x
RCL 8
+
RCL 8
+
RCL A
2
+
:
RTN
```

Das Voranschreiten von Zeile j zu j+1 in den Datenspeichern erfolgt wieder durch den Austausch von Primär- und Sekundärspeicher.

Speicherplan

	A	B	C	D	E	I
	(A-1) - 0,737	frei	frei	frei	Zähler j Beginn: 1	Zähler i

x=0								x=L		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zeitzeile j+1
u_0							u_{l-1}	u_l	u_{l+1}	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Zeitzeile j

Die Anfangswerte für die Zeile j = 0 nach (6.11) sind in die Speicher 10 bis 18 , für die Zeile j = 1 nach (6.12) in die Speicher 0 bis 8 einzugeben.

7. Telegraphengleichung, Wanderwelle

7.1 Problemstellung und Lösungsweg

Kabel und Freileitungen der Fernmelde- und Starkstromtechnik sind Leitungsgebilde von großer räumlicher Ausdehnung. Es ist daher nicht mehr gewährleistet, daß in jedem Punkt einer längeren Leitungsverbindung zur gleichen Zeit auch der selbe Spannungs- und Stromzustand herrscht, wie dieses bei konzentrierten Schaltungen vorausgesetzt werden kann. Jetzt hat eine zeitliche Änderung von Spannung und Strom auch eine räumliche Änderung des elektrischen Zustandes auf der Leitung zur Folge. So wird die räumliche Verteilung des Stromes im Leitungsdraht oder die räumliche Verteilung der Spannung zwischen Hin- und Rückleitung von Interesse, besonders bei Spannungsänderungen am Leitungsanfang. Die physikalische Betrachtung führt auf die beiden "Telegraphengleichungen" für die Spannung U und den Strom I:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = R_o I + L_o \cdot \frac{\partial I}{\partial t} \tag{7.1}$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = G_o U + C_o \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \tag{7.2}$$

mit

Widerstand der Doppelleitung	R_o	Ω/km
Induktivität	L_o	H/km
Ableitung (Isolierfähigkeit)	G_o	S/km
Kapazität	C_o	F/km .

Die beiden Gleichungen sagen aus, daß grundsätzlich jede Spannungsverteilung auf der Leitung möglich ist und daß Spannungs- und Stromverteilung voneinander abhängen. Außerdem ist die Verteilung nicht stationär, sondern es wandern Spannungs- und Stromwellen von einem Strömungspunkt aus längs der Leitung.

Für die weitere Betrachtung setzen wir die Ableitung $G_o = 0$, bei der heutigen Isolationstechnik eine zulässige Vereinfachung. Um die Spannungs- und Stromwelle gleichzeitig rechnen zu können, führen wir eine übergeordnete Funktion u ein, aus der sich die Spannung U und der Strom I durch partielle Ableitungen ergeben sollen:

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{7.3}$$

$$I = - C_o \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad . \tag{7.4}$$

Für $G_o = 0$ erfüllen diese Beziehungen (7.2) und überführen (7.1) in die partielle Differentialgleichung einer Wanderwelle:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.5}$$

mit

$$a = R_o C_o$$

$$b^2 = L_o C_o \quad .$$

(7.5) beschreibt eine Welle, die längs einer Leitung mit der Wellengeschwindigkeit $v = 1/b$ wandert und dabei eine Dämpfung erfährt, die proportional a ist. (7.5) kombiniert die beiden partiellen Differentialgleichungen (5.1) und (6.1).

Beschreibung des Verfahrens

Entsprechend den Ausführungen im Kapitel 6 setzen wir für den Ersatz der Differentialquotienten durch Zentralformeln

$$x = i \cdot h \; ; \quad t = j \cdot k \; ; \quad k = h \cdot b = h \sqrt{L_o C_o} \quad . \tag{7.6}$$

Dann führen wir noch zusätzlich die Abkürzung

$$\frac{u}{2 \cdot h} = w$$

ein. Dann gehen (7.3) und (7.4) über in

$$U_{i,j} = w_{i+1,j} - w_{i-1,j} \tag{7.7}$$

$$I_{i,j} = \frac{1}{Z_o}(w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) \tag{7.8}$$

und (7.5) in

$$(A+1)w_{i,j+1} = w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + (A-1)w_{i,j-1} \tag{7.9}$$

mit

Wellenwiderstand $Z_o = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}}$ Ω

und $A = \frac{h}{2}\cdot\frac{R_o}{Z_o}$. (7.10)

In der Rekursionsformel (7.9) stehen dem unbekannten Wert $w_{i,j+1}$ drei bekannte Werte aus der Zeitzeile j und j-1 gegenüber. Spannungs- und Stromwelle ergeben sich nach (7.7) und (7.8). Die Abb. 37 veranschaulicht auch die Rekursionsformel der gedämpften Welle. Die Funktionswerte in der Waagrechten ergeben die Spannungswelle, die in der Senkrechten die Stromwelle. Dieser einfache Rechnungsgang erfährt leider eine Erschwernis bei der Anpassung an die Randbedingungen. Die Verwendung von Zentralformeln führt auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die erste Gleichung ist die Rekursionsformel (7.9) für den Randpunkt, die zweite Gleichung ist die Randbedingung nach den Gesetzen der Elektrotechnik. So beschreibt z.B. die Gleichung

$$U_{0,j} = E - I_{0,j}\cdot R_1 = E - \frac{R_1}{Z_o}\cdot(w_{0,j-1} - w_{0,j+1}) \tag{7.11}$$

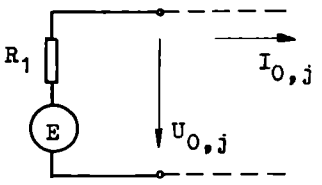


Abb. 40 Speiseschaltung: Spannung mit Widerstand

nach Abb. 40 das Einschalten einer Spannung E über einen Widerstand R_1 am Leitungsanfang ($i = 0$). Die beiden Gleichungen (7.9) und (7.11) lassen sich entweder nach der Unbekannten $w_{0-1,j}$ (Fall I) oder nach $w_{0,j+1}$ (Fall II) auflösen.

Im Fall I ist die Unbekannte ein Funktionswert jenseits des Randes ($i = 0-1$). Ist sie ermittelt und gespeichert, so lassen sich Spannung und Strom auch am Rande, wie in den anderen Gitterpunkten, nach (7.7) und (7.8) errechnen.

Im Fall II wird die Spannung am Leitungsanfang nach (7.11) und der Strom nach (7.8) bestimmt. Der Rechnungsgang ist etwas umständlicher.

Bei einem Kondensator am Anfang oder Ende der Leitung gibt es eine Randbedingungsgleichung in einfacher Form nur für den Fall I und für die Zeitzeile $j+1$.

Randbedingungsgleichungen

Eine Übersicht über einige Schaltungen an den Leitungsrändern zeigt Abb. 41 . Die zugehörigen Gleichungen sind für Fall I und II mit den folgenden Abkürzungen zusammengestellt:

$$p = \frac{h}{2}\frac{C_o}{C_1} \quad ; \qquad q = \frac{2}{h}\frac{L_1}{L_o} \quad ; \qquad r = \frac{R_1}{Z_o} \; . \tag{7.12}$$

Schaltung a_2: Einschalten einer Spannung E

I $\quad w_{0-1,j} = w_{0+1,j} - E$

II $\quad (A+1)w_{0,j+1} = 2\cdot w_{0+1,j} - E + (A-1)w_{0,j-1}$

$\quad U_{0,j} = E.$

Schaltung a_3: Einschalten einer Spannung E über Widerstand und/oder Induktivität

I $\quad (A+1+r+q)w_{0-1,j} = (A+1-r-q)w_{0+1,j} + (A+1)(2q\cdot w_{0,j} - E) +$

$\qquad + 2\cdot(r - Aq)w_{0,j-1}$

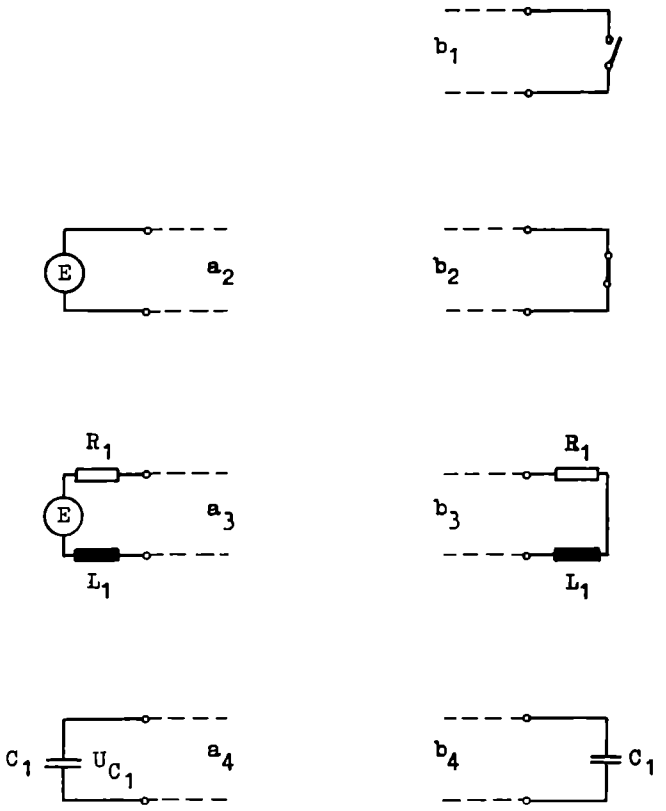


Abb. 41 Randschaltungen: Speise- und Verbraucherseite

$$\text{II} \quad (A+1+r+q)w_{0,j+1} = 2\cdot(w_{0+1,j} + qw_{0,j}) - E + (A-1+r-q)w_{0,j-1}$$

$$U_{0,j} = E - r(w_{0,j-1} - w_{0,j+1}) + q(w_{0,j+1} + w_{0,j-1} - 2\cdot w_{0,j}).$$

Schaltung a_4: Zuschalten eines geladenen Kondensators

$$\text{I} \quad (A+1)w_{0-1,j+1} = w_{0,j} + w_{0+2,j} + (A-1)w_{0-1,j-1} + \\ - \frac{2}{1+p}\cdot\left[w_{0+1,j} - w_{0-1,j} + p(w_{0+2,j} - w_{0,j})\right].$$

Die Strom- und Spannungswelle erfordert die Eingabe von w- Werten für die Zeitzeile $j = -1$ und $j = 0$.

Für $i \geqslant 0$ sind die Anfangswerte w dieser Zeitzeilen Null zu setzen.
Der erste nach den obigen Gleichungen errechnete Randwert ist

im Fall I $w_{0-1,0}$,

im Fall II $w_{0,1}$.

Nur für Schaltung a_4 ist der erste Randwert $w_{0-1,1}$. Hier ist die Spannung am Kondensator zusätzlich negativ einzugeben:

$$w_{0-1,0-1} = w_{0-1,0} = - U_{C_1} \quad .$$

Schaltung b_1: Leitungsende offen

I $\quad w_{l+1,j} = 2 \cdot w_{l,j-1} - w_{l-1,j}$

II $\quad w_{l,j+1} = w_{l,j-1}$

$$U_{l,j} = 2 \cdot (w_{l,j+1} - w_{l-1,j}).$$

Schaltung b_2: Leitungsende kurzgeschlossen

I $\quad w_{l+1,j} = w_{l-1,j}$

II $\quad (A+1)w_{l,j+1} = 2 \cdot w_{l-1,j} + (A-1)w_{l,j-1}$

$$U_{l,j} = 0.$$

Schaltung b_3: Leitung mit Widerstand und/oder Induktivität belastet

I $\quad (A+1+r+q)w_{l+1,j} = 2 \cdot \left[q(A+1)w_{l,j} + (r-Aq)w_{l,j-1}\right] +$

$$+ (A+1-r-q)w_{l-1,j}$$

$$\text{II} \quad (A+1+r+q)w_{l,j+1} = 2\cdot(w_{l-1,j} + qw_{l,j}) + (A-1+r-q)w_{l,j-1}$$

$$U_{l,j} = r(w_{l,j-1} - w_{l,j+1}) - q(w_{l,j+1} + w_{l,j-1} - 2\cdot w_{l,j}).$$

Schaltung b_4: Leitung mit Kondensator belastet

$$\text{I} \quad (A+1)w_{l+1,j+1} = w_{l,j} + w_{l-2,j} + (A-1)w_{l+1,j-1} + \\ - \frac{2}{1+p}\cdot\left[w_{l-1,j} - w_{l+1,j} + p(w_{l-2,j} - w_{l,j})\right].$$

Programmablaufplan

Den Programmablaufplan für den Fall I zeigt die Abb. 42. Er ist wie der in Abb. 38 aufgebaut. Lediglich die Berechnung von Spannung $U_{i,j}$ und Strom $I_{i,j}$ ist hinzugekommen.
Die Eingabe der Anfangs- und Randwerte wurde bereits bei den Randwertgleichungen besprochen. Die w- Werte zweier aufeinanderfolgender j- Zeilen müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Dabei dürfen die Datenspeicher der Zeile j-1 erst durch die Daten der Zeile j+1 überschrieben werden.
Die Änderungen im Programmablaufplan für den Fall II sind in der Abb. 54 enthalten.

7.2 Beispiel. Speisung einer am Ende offenen Leitung über eine Induktivität

Es soll die Wanderwelle ermittelt werden, die beim Zuschalten einer Spannung über eine Induktivität entsteht, wenn das Leitungsende offen ist (Abb.43).
Die Leitung habe die folgenden Kenngrößen:

Länge	s	=	1	km
	E	=	10	kV
	L_1	=	$40\cdot10^{-6}$	H
	R_o	=	16,6	Ω/km
	L_o	=	$200\cdot10^{-6}$	H/km
	C_o	=	$80\cdot10^{-9}$	F/km .

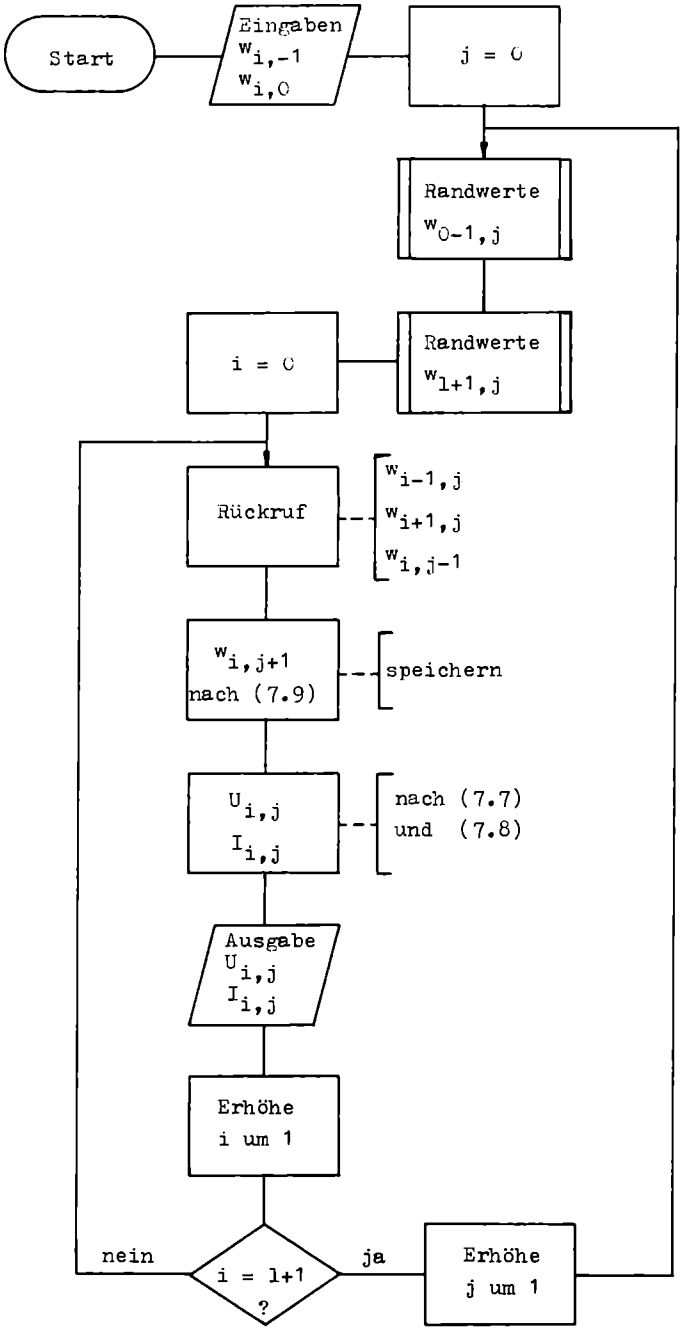


Abb. 42 Wanderwelle (Fall I)

Abb. 43 Speisung einer am Ende offenen Leitung über eine Induktivität

Der relativ hohe Widerstand entspricht einem Aluminiumdraht von 2,2 mm Leitungsdurchmesser.

Wir unterteilen die Leitungslänge in vier Teile. Dieser sehr grobe Gitterraster wurde für einen Vergleich mit Ergebnissen aus dem Beispiel 9.2 gewählt. Das ergibt nach (7.6)

$$h = 0{,}25 \quad \text{km} \; ; \qquad k = 1 \cdot 10^{-6} \quad \text{s} \; .$$

Die Geschwindigkeit der Welle errechnet sich zu $v = 2{,}5 \cdot 10^5$ km/s. Bei einer Länge von einem Kilometer hat die Welle das Leitungsende nach einer Zeit von

$$T = \frac{1}{v} = 4 \cdot 10^{-6} \quad \text{s}$$

erreicht. Für das Beispiel gelten die Randbedingungsgleichungen a_3 mit $r = 0$

$$\text{I} \quad (A+1+q)w_{0-1,j} = (A+1-q)w_{0+1,j} + (A+1)(2q \cdot w_{0,j} - E) + \\ - 2 \cdot Aq \cdot w_{0,j-1}$$

$$A = 0{,}0415 \qquad \text{nach (7.10)}$$

$$q = 1{,}6 \qquad \text{nach (7.12)}$$

und b_1

$$\text{I} \quad w_{l+1,j} = 2 \cdot w_{l,j-1} - w_{l-1,j} \cdot$$

Die gerechnete Spannungswelle an drei Leitungspunkten zeigt die Abb. 44. Die Dämpfung der Welle durch den sehr großen Leitungs-

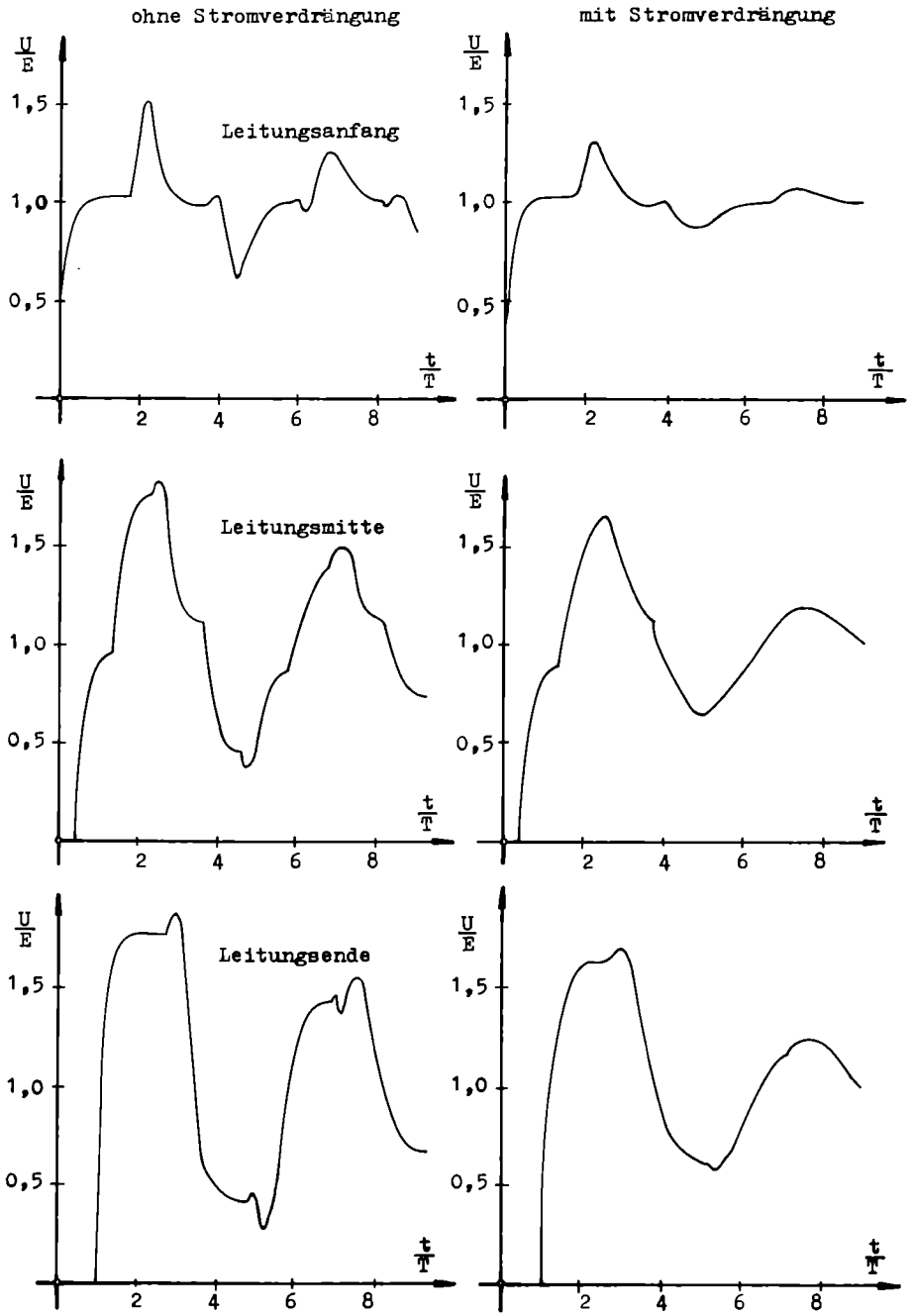


Abb. 44 Wanderwelle des Beispiels 7.2 ohne und mit Stromverdrängung

widerstand macht sich deutlich bemerkbar. Die Spannung am Leitungsende hat einen ähnlichen Verlauf wie die Kompressionswelle in Abb. 39. In die Abb. 44 sind auch die Ergebnisse des Beispieles 9.2 zum Vergleich eingezeichnet.

Die Wanderwelle wurde auf einem HP 67 mit folgendem Programm gerechnet. Die Datenausgabe beschränkt sich auf Anfang, Mitte und Ende der Leitung.

Hauptprogramm

LBL A	RCL A
RCL E	2
1	+
+	:
STO E	RCL(i)
PAUSE	x⇄y
0	STO(i)
ST I	-
GSB a	P⇄S
STO 0	GSB 2
GSB b	RC I
STO 6	5
LBL 1	x ≠ y
RCL(i)	GTO 1
ISZ	P⇄S
ISZ	GTO A
RCL(i)	
+	
DSZ	
P⇄S	
RCL(i)	
RCL A	
x	
+	

Ausgabe Strom und Spannung

LBL 2
RC I
2
:
FRAC
x = 0
RTN
R↓
x⇄I
PAUSE
x⇄I
RCL B
:
-X-
ISZ
RCL(i)
DSZ
DSZ
SPACE
RCL(i)
-
ISZ
-X-
RTN

Unterprogramme f. die Ränder i = 0-1 ; i = 1+1

LBL a	x
2	P⇄S
RCL C	RCL 1
x	P⇄S
RCL 1	x
x	-
RCL D	RCL A
-	2
RCL A	+
2	RCL C
+	+
x	:
LASTX	RTN
RCL C	
-	LBL b
RCL 2	P⇄S
x	RCL 5
+	RCL 5
RCL A	+
1	P⇄S
+	RCL 4
RCL C	-
x	RTN
2	

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
(A-1)	Z_0	q	E	Zähler j	Zähler i
- 0,9585	50	1,6	10	Beginn: -1	

	x=0				x=L					
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zeitzeile j
w_{0-1}	w_0	w_{0+1}		w_{l-1}	w_l	w_{l+1}	frei	frei	frei	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Zeitzeile j+1

8. Stromverdrängung, Skineffekt

8.1 Problemstellung und Lösungsweg

Eine Wärmeleitung in x- und y- Richtung führt auf die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad . \tag{8.1}$$

Als Lösung wird ein Raum im x y t u - Koordinatensystem gesucht. Schwierigkeiten entstehen dabei weniger in der Numerik, mehr bei der bildlichen Darstellung der Ergebnisse.
Neben der Wärmeleitung in dünnen Platten erlaubt die Gleichung die Stromverdrängung (Skineffekt) der Elektrotechnik zu berechnen. Nur für Gleichspannung ist die Stromdichte über dem Leiterquerschnitt konstant. Bei Wechselspannung führt die endliche Aufbauzeit des elektromagnetischen Feldes im Drahtinnern zur Störung dieser gleichmäßigen Stromverteilung. Im massiven Leiter bilden sich Wechselströme aus, die sich dem eigentlichen Leiterstrom überlagern und die gleichmäßige Verteilung aufheben. Der Strom wird immer mehr aus dem Innern an die Außenhaut gedrängt. Bei vorgegebener Spannung verkleinert sich der fließende Strom durch diese auch als Selbstinduktion bezeichnete Wirkung, welche einer Widerstandserhöhung gleichkommt. Die Funktion u ist jetzt die Komponente der elektrischen Feldstärke E im Drahtinnern, die parallel zur Leiterachse gerichtet ist. Die Konstante a ist das Produkt aus elektrischer Leitfähigkeit κ und magnetischer Permeabilität μ:

$$a = \kappa \cdot \mu \quad . \tag{8.2}$$

Beschreibung des Verfahrens

Das Verfahren aus Kapitel 5 wird in der y- Richtung erweitert. Zunächst vereinfacht sich die Differentialgleichung durch die Substitution nach (5.2)

$$t = a \cdot \tau$$

zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad . \tag{8.3}$$

Dann werden die drei Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt, wobei man für $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ wieder auf eine einseitige Differenzengleichung zurückgreift. Mit

$$\begin{aligned} x &= i \cdot h \\ y &= i' \cdot h \\ \tau &= j \cdot k = j \cdot n \cdot h^2 \end{aligned} \tag{8.4}$$

ergibt sich die Rekursionsformel in den Gitterpunkten

$$\begin{aligned} u_{i,i',j+1} = n \cdot \Big(& u_{i+1,i',j} + u_{i-1,i',j} + u_{i,i'+1,j} + \\ & + u_{i,i'-1,j} - 4\, u_{i,i',j} \Big) + u_{i,i',j} \quad . \end{aligned} \tag{8.5}$$

Es stehen der unbekannten Feldstärke $u_{i,i',j+1}$ in der Zeitschicht $j+1$ fünf bekannte der Zeitschicht j gegenüber. Die Rechnung ist für $n \leqslant 0{,}5$ numerisch stabil und hat für $n = \frac{1}{6}$ den kleinsten Diskretisierungsfehler.

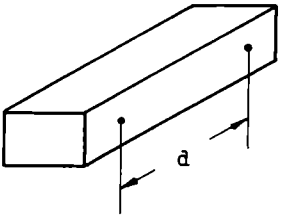


Abb. 45 Zur Randwertbestimmung

Für die Bestimmung der Randwerte, der Stromdichte S und des Leiterstromes I bediene man sich der folgenden einfachen Beziehungen:
Die Spannungsdifferenz U_j zwischen zwei um d entfernte Leiterpunkte (Abb.45) bestimmt die Feldstärke am Leiterrand

$$u_{a,j} = E_{a,j} = \frac{U_j}{d} \quad . \tag{8.6}$$

Die Stromdichte S im Leiter findet man aus der Feldstärke

$$S = \kappa \cdot u = \kappa \cdot E \quad , \tag{8.7}$$

und den im Leiter fließenden Strom I erhält man aus der Stromdichte durch eine numerische Integration über den Drahtquerschnitt A (siehe hierzu Abschnitt 8.2)

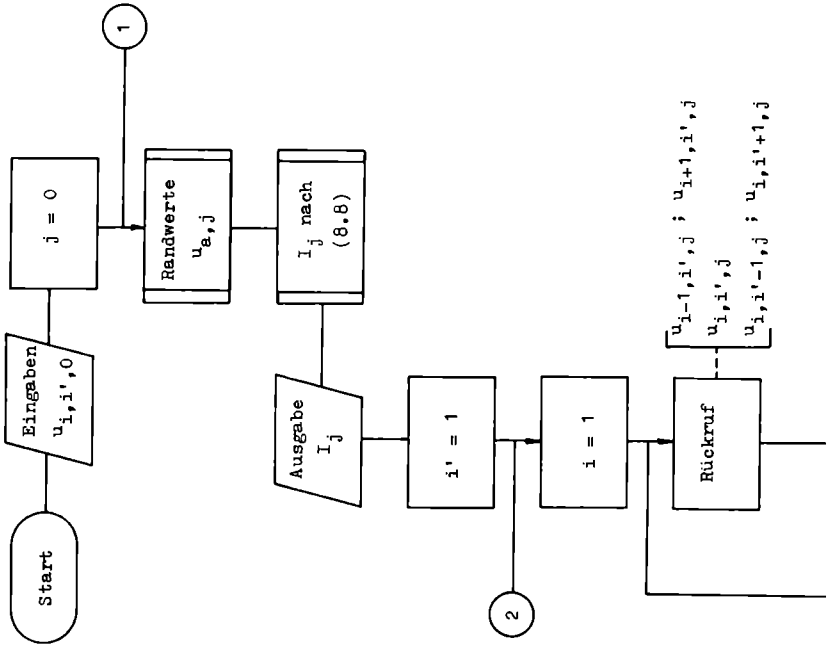
$$I = \iint_A S \cdot dA. \tag{8.8}$$

Programmablaufplan

Der Leiter habe einen rechteckigen Querschnitt $a \cdot b$. Zu Beginn der Rechnung (Abb.46) erfolgt die Eingabe der Feldstärkenwerte der Zeitschicht $j = 0$ (meist gleich Null). Die Berechnung der Randfeldstärke $u_{a,j}$ aus der aufgedrückten Leiterspannung nach (8.6) kann in einem Unterprogramm erfolgen. Ebenfalls die Berechnung des Stromes nach (8.8). Die Feldstärkenwerte zweier aufeinanderfolgender Zeitschichten j müssen während der Rechnung zwischengespeichert werden. Die Daten der Schicht j-1 dürfen dabei erst durch die Daten der Schicht j+1 überschrieben werden.

8.2 Übergang auf Polarkoordinaten

Oft sind technische Probleme für Körper von zylindrischer Form zu lösen, z.B. die Stromverdrängung in runden Drähten. Zur Ver-



einfachung der Rechnung führt man dann gerne die Polarkoordinaten r und φ ein:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad (8.9)$$
$$y = r \cdot \sin\varphi \quad .$$

Nach dem Übergang auf Polarkoordinaten schreibt sich die Differentialgleichung (8.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad . \qquad (8.10)$$

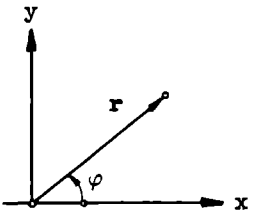


Abb. 47 Polarkoordinaten

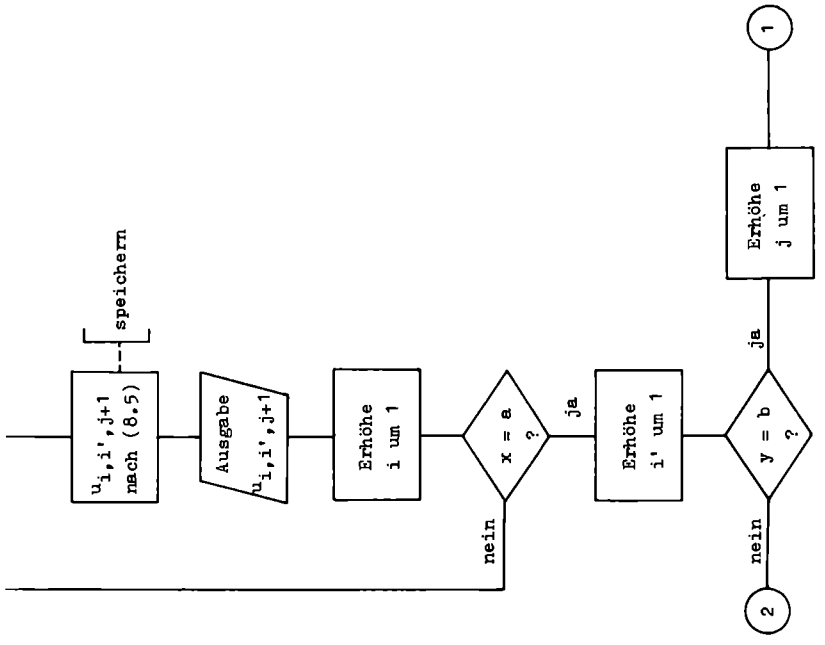


Abb. 46 Stromverdrängung

Aus Symmetriegründen innerhalb eines Zylinders ist in vielen technischen Anwendungen die Funktion u unabhängig vom Winkel φ, d.h.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad ,$$

und die Gleichung (8.10) vereinfacht sich mit der Substitution (5.2) zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad . \tag{8.11}$$

Der Ersatz durch Differenzenquotienten führt mit

$$r = i \cdot h \tag{8.12}$$

$$\tau = j \cdot k = j \cdot n \cdot h^2$$

zur Rekursionsformel in den Gitterpunkten

$$u_{i,j+1} = n\cdot\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{1}{2i}\cdot(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + (\frac{1}{n} - 2)u_{i,j}\right] \quad , \tag{8.13}$$

wiederum numerisch stabil für $n \leqslant 0{,}5$ und $n = \frac{1}{6}$ als bester Wert.
Jetzt werden für den unbekannten Wert $u_{i,j+1}$ nur noch drei bekannte benötigt. Dafür muß aber gewährleistet sein, daß im Mittelpunkt der Kreisfläche $(i = 0)$ $u_{i,j+1}$ endlich bleibt. Die Funktion u ist symmetrisch zum Kreismittelpunkt, d.h.

$$u_{0-1,j} = u_{0+1,j}$$

oder

$$\frac{1}{2i}\cdot(u_{0-1,j} - u_{0+1,j}) = 0 \quad .$$

Im Kreismittelpunkt schreibt sich damit die Rekursionsformel

$$u_{0,j+1} = n\cdot\left[2\ u_{1,j} + (\frac{1}{n} - 2)u_{0,j}\right] \quad . \tag{8.14}$$

Auch die Berechnung der Stromstärke I aus der Feldstärke $u = E$ nach (8.8) vereinfacht sich in Polarkoordinaten. Mit dem Flächenelement

$$dA = 2\cdot\pi\cdot r\cdot dr$$

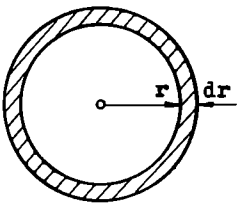


Abb. 48 Flächenelement in Polarkoordinaten

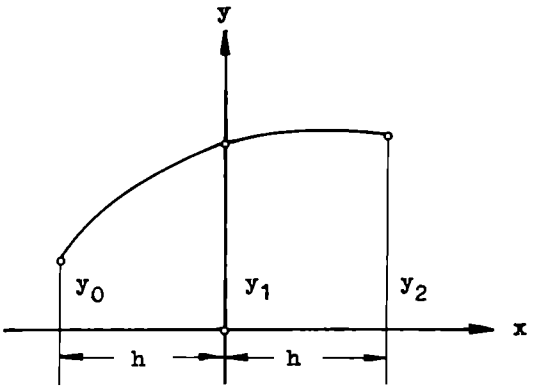


Abb. 49 Keplersche Faßregel

geht das Doppelintegral über in

$$I = 2\cdot\pi\cdot\kappa\cdot\int_0^a E\cdot r\cdot dr,$$

wobei a der Außenradius der Kreisfläche ist.

Dieses Integral kann numerisch durch ein- oder mehrfachen Ansatz der Keplerschen Faßregel gelöst werden. Diese einfache alte Regel erlaubt ein Integral der Kurve $y = f(x)$ angenähert aus nur drei Ordinatenwerten zu bestimmen (Abb.49):

$$\int_{-h}^{+h} y\cdot dx \approx \frac{h}{3}\cdot(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2) \quad .$$

Wir verdanken diese Regel Johannes Kepler (1571 bis 1630). Seine erfolgreiche numerische Auseinandersetzung mit unlauteren Weinhändlern gab dieser Regel ihren Namen [2].

2) W. Gerlach und M. List, Johannes Kepler, München 1971

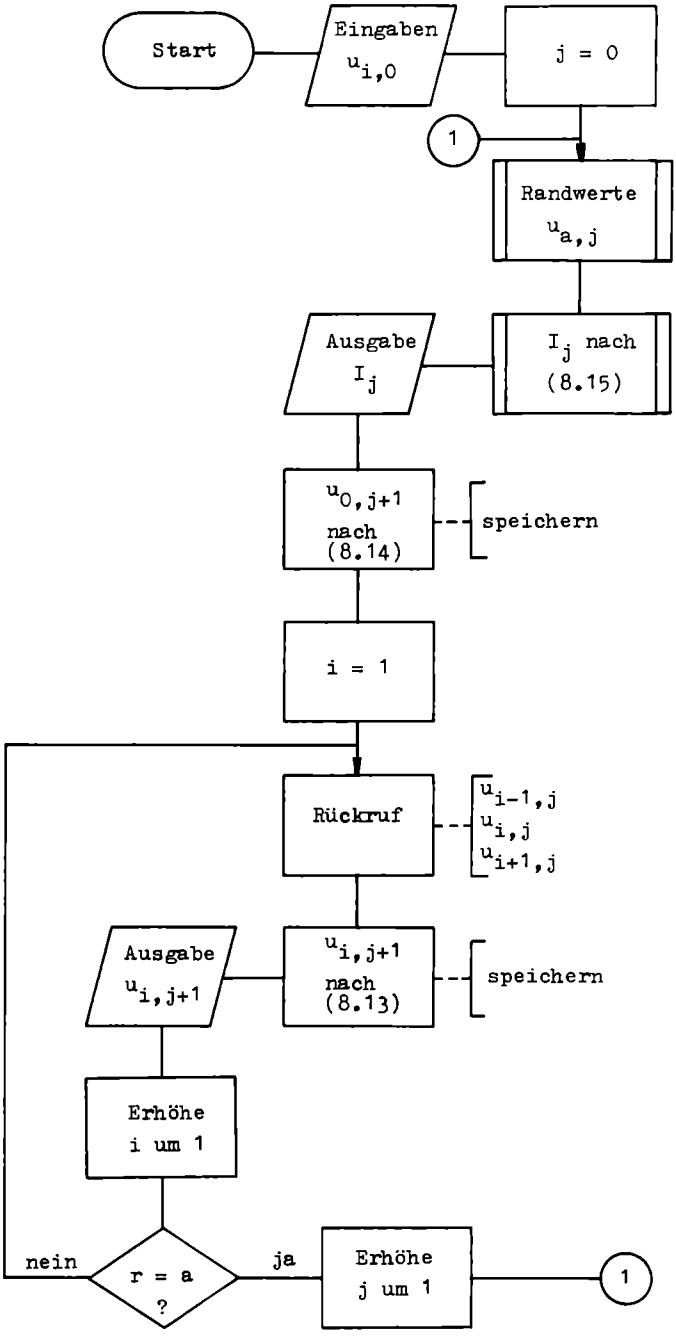


Abb. 50 Stromverdrängung, Übergang auf Polarkoordinaten

Mit $y = E \cdot r$ ergeben sich nach Kepler für I , bei verschieden feiner Gitterunterteilung, folgende Gleichungen:

$$h = \frac{a}{2} \; ; \qquad i = 0,\ 1,\ 2$$

$$I_j = \kappa A \cdot \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot E_{1,j} + E_{2,j})$$

$$h = \frac{a}{4} \; ; \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$I_j = \kappa A \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (E_{1,j} + E_{2,j} + E_{4,j}) + E_{3,j}\right] \tag{8.15}$$

$$h = \frac{a}{6} \; ; \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

$$I_j = \kappa A \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (E_{1,j} + E_{2,j} + 3 \cdot E_{3,j} + 2 \cdot E_{4,j} + 5 \cdot E_{5,j}) + E_{6,j}\right]$$

Kreisfläche $A = \pi \cdot a^2$.

Der Programmablaufplan der Abb. 46 vereinfacht sich zur Abb. 50.

8.3 Beispiel. Stromverdrängung in runden Drähten bei nichtsinusförmiger Spannung

Es sollen für vier Spannungskurven (Abb.51) von gleicher Frequenz und gleichem Maximalwert die Stromkurven und die Wechselstromwiderstände eines Kupferdrahtes errechnet werden:

Frequenz	$f =$	13 153	Hz
Drahtradius	$a =$	0,33	cm
Leitfähigkeit	$\kappa =$	$50 \cdot 10^4$	$\frac{1}{\Omega\,\mathrm{cm}}$
Permeabilität	$\mu =$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-9}$	$\frac{\Omega\,\mathrm{s}}{\mathrm{cm}}$

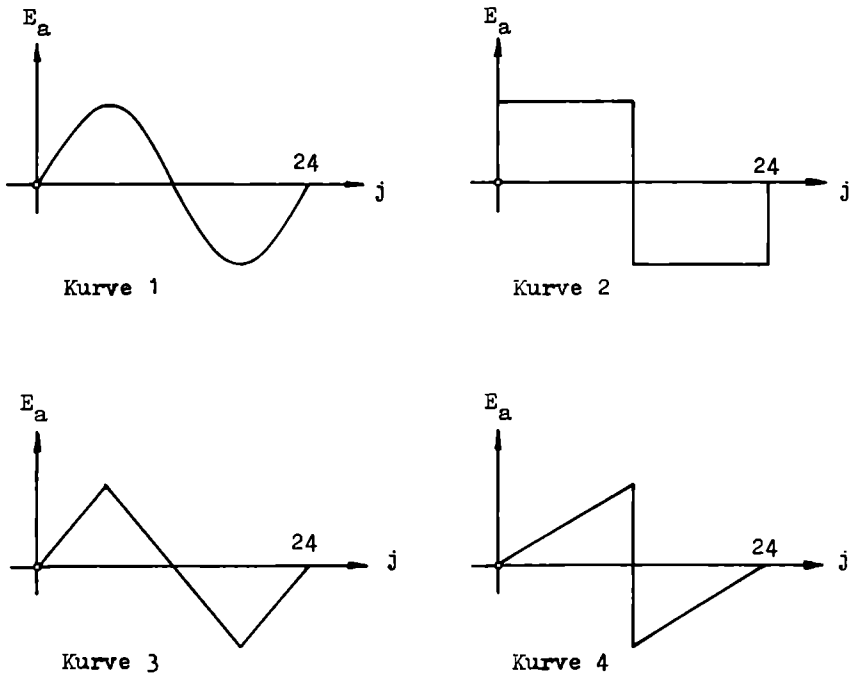


Abb. 51 Spannungskurven zum Beispiel 8.3

Der Spitzenwert der Außenfeldstärke soll jeweils

$$(E_a)_{max} = 2{,}9 \cdot 10^{-5} \quad \frac{V}{cm}$$

betragen. Wir unterteilen den Radius in sechs Teile

$$h = 0{,}055 \quad cm \; .$$

Dann errechnet sich zunächst, mit τ nach (8.12), der Substitution nach (5.2) und bei $n = 1/6$

$$\omega \cdot t = 2\pi f \cdot \kappa \mu n \cdot h^2 \cdot j = 0{,}2618 \cdot j \quad ,$$

d.h. die Spannungskurve hat eine Periodendauer in Zeitschritten

$$j_T = \frac{2\pi}{0{,}2618} = 24 \quad .$$

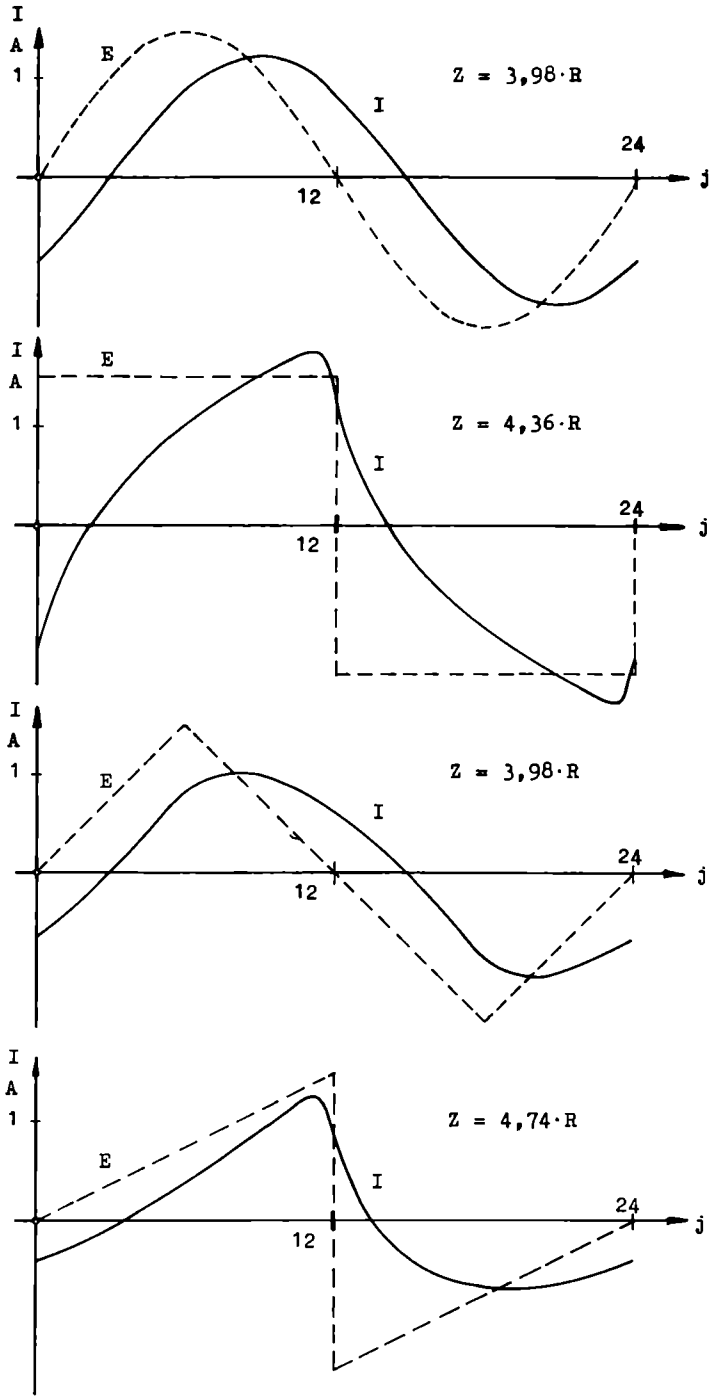


Abb. 52 Stromkurven des Beispiels 8.3

Die Feldstärke im Drahtinnern errechnet sich nach (8.13) und (8.14), die sich daraus ergebenden Stromwerte nach (8.15). Das Ergebnis im eingeschwungenen Zustande (nach $j \approx 120$) zeigt die Abb. 52. Der Wechselstromwiderstand Z gegenüber dem Gleichstromwiderstand R ergibt sich aus den Effektivwerten (quadratische Mittelwerte) von Feldstärke und Strom:

$$Z = c \cdot R \quad ; \qquad c = \kappa \cdot A \cdot \frac{E_{eff}}{I_{eff}} \quad . \tag{8.16}$$

Die Stromkurven wurden auf einem HP 67 gerechnet. Im nachfolgenden Programm darf jeweils nur eines der Kurvenunterprogramme benutzt werden. Die Datenausgabe beschränkt sich auf die Stromstärke I .

Hauptprogramm		Unterprogramm I m. Ausgabe	Unterprogramme f. Rand r=a Kurve 1	Kurve 3	Kurve 4
LBL A	2	LBL b	LBL a	LBL a	LBL a
RCL E	:	RCL 1	RAD	RCL E	.
1	DSZ	RCL 2	RCL E	RCL B	5
+	RC I	+	RCL C	:	RCL E
STO E	:	RCL 3	x	FRAC	RCL B
PAUSE	-	3	SIN	4	:
0	RCL(i)	x	RTN	1/x	FRAC
ST I	4	+		x>y	x = y
GSB a	x	RCL 4	Kurve 2	GTO 3	GTO 3
RCL A	+	+		3	x>y
x	6	RCL 4	LBL a	x	GTO 4
STO 6	:	+	RCL E	x≤y	2
GSB b	P⊂S	RCL 5	RCL B	GTO 4	x
RCL 0	STO(i)	5	:	x⊂y	RTN
RCL 0	RC I	x	FRAC	4	LBL 3
+	5	+	1	x	0
RCL 1	x ≠ y	2	0	2	RTN
+	GTO 1	x	x	-	LBL 4
3	GTO A	3	x = 0	CHS	2
:		:	5	RTN	x
P⊂S		RCL 6	ENTER	LBL 4	2
STO 0		+	5	x⊂y	-
LBL 1		9	x = y	1	RTN
P⊂S		:	0	-	
RCL(i)		RCL D	x≤y	4	
RCL(i)		x	CHS	x	
ISZ		-X-	1	RTN	
ISZ		RTN	x	LBL 3	
RCL(i)			5	x⊂y	
+			:	4	
x⊂y			RTN	x	
RCL(i)				RTN	
-					

Das Voranschreiten in den Datenspeichern von j zu j+1 erfolgt durch einen Austausch der Primär- und Sekundärspeicher: P⟲S .

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
$(E_a)_{max}$	j_T		$\kappa \cdot A$	Zähler j	Zähler i
$2{,}9 \cdot 10^{-5}$	24	0,2618	$1{,}711 \cdot 10^5$	Beginn: -1	

r=0						r=a				
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Zeitzeile j
$E_{0,j}$						$E_{a,j}$		frei		
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Zeitzeile j+1

9. Wanderwelle mit Stromverdrängung

9.1 Problemstellung und Lösungsweg

Nach Kapitel 7 ist für die Dämpfung einer Wanderwelle der Widerstand der Doppelleitung maßgebend. Im Kapitel 8 wurde gezeigt, daß bei schnellen zeitlichen Spannungsänderungen der Skineffekt eine Erhöhung des Drahtwiderstandes bewirkt. Bei der großen Geschwindigkeit der Wanderwelle ist ein Stromverdrängungseffekt auf der Leitung nicht auszuschließen. Seine Auswirkung auf die Welle soll untersucht werden.
Setzen wir einen runden Drahtquerschnitt voraus, so ergibt die Zusammenstellung der Gleichungen aus Kapitel 7.1 und 8.2 ein System von drei partiellen Differentialgleichungen und einer Integralgleichung:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 2\cdot E_a + L_o\cdot\frac{\partial I}{\partial t} \tag{9.1}$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C_o\cdot\frac{\partial U}{\partial t} \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial E}{\partial \tau} \tag{9.3}$$

$$I = 2\cdot\pi\cdot\kappa\cdot\int_0^a E\cdot r\cdot dr. \tag{9.4}$$

In Gleichung (9.1) wurde der ohmsche Spannungsabfall bei Gleichstrom $I\cdot R_o$ durch $2\cdot E_a$ ersetzt, wobei E_a die parallel zur Leiterachse gerichtete Komponente der elektrischen Feldstärke an der Drahtoberfläche ($r = a$) ist.

Beschreibung des Verfahrens

Zur Lösung des Gleichungssystems mit der Gitterpunktmethode verwenden wir zwei Gitter:

1. In Leitungsrichtung (Wanderwelle)

$$x = h \cdot i \quad \text{km}$$
$$t = k \cdot j \quad \text{s} \; ; \qquad k = h \sqrt{L_o C_o} \; .$$

2. In radialer Richtung, senkrecht zur Leitung (Stromverdrängung)

$$r = h' i' \quad \text{cm}$$
$$\tau = k' j' \quad \text{cm}^2 \; ; \qquad k' = \frac{1}{6} \cdot (h')^2 \; .$$

Dann ist das Verhältnis der beiden Zeittakte zueinander

$$\frac{j}{j'} = H \cdot \frac{1}{7500 \cdot s \cdot R_o \sqrt{L_o C_o}} \tag{9.5}$$

Leitungslänge	s	km
Widerstand der Doppelleitung	R_o	Ω/km
Induktivität	L_o	H/km
Kapazität	C_o	F/km
Drahtradius	a	cm .

Der Beiwert H richtet sich nach den gewählten Gitterabmessungen.

Beiwert H

h' \ h	$\frac{s}{4}$	$\frac{s}{5}$	$\frac{s}{6}$	$\frac{s}{7}$	$\frac{s}{8}$
$\frac{a}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
$\frac{a}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{a}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$

Die Berechnung der Wanderwelle soll nur während einer Zeit T nach dem Zuschalten einer Spannung erfolgen. Gilt für diese Zeit

$$T \leqslant \frac{j}{j'} \cdot k \quad ,$$

so ist der Vorgang so kurz, daß das elektromagnetische Feld nur wenig in den Draht eindringen kann. Die Rekursionsformel für das Gitter in Leitungsrichtung entspricht dann der Gleichung (7.9)

$$(A'+1)w_{i,j+1} = w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + (A'-1)w_{i,j-1} \quad . \qquad (9.6)$$

A wird durch A' ersetzt, weil nicht der volle Drahtquerschnitt für die Stromwelle zur Verfügung steht. Je nach der gewählten Gitterabmessung in radialer Richtung ist

$$h' = \frac{a}{2} \qquad A' = 3 \cdot A$$

$$h' = \frac{a}{4} \qquad A' = 6 \cdot A$$

$$h' = \frac{a}{6} \qquad A' = 9 \cdot A$$

zu setzen mit

$$A = \frac{h}{2} \cdot \frac{R_o}{Z_o} \quad ; \quad R_o = \frac{2}{\kappa \pi a^2} \quad \Omega/\mathrm{km} \quad . \qquad (9.7)$$

Die Wanderwelle mit Stromverdrängung wird dann weiter nach Kapitel 7 gerechnet.
Ist dagegen

$$T > \frac{j}{j'} \cdot k \quad ,$$

so dringt das elektromagnetische Feld mehr und mehr in das Drahtinnere ein. Die Welle läßt sich dann mit einem Taschenrechner auf folgende Weise rechnen.

Wegen der begrenzten Anzahl von Datenspeichern verwenden wir zwei grobe Gitterraster

$$h = \frac{s}{4} \quad \mathrm{km} \; , \qquad h' = \frac{a}{2} \quad \mathrm{cm} \; .$$

Damit sind 19 Datenspeicher belegt: je fünf für die Funktionswerte $w_{i,j}$ und $w_{i,j+1}$ im Wanderwellengitter und drei mal drei für die Feldstärken im Stromverdrängungsgitter E_0 , E_1 , E_a der Zeitzeile j' an den drei Leitungspunkten i = 1, 2, 3 (Abb.53). An den Rändern i = 0 und i = 4 werden die Feldstärken im Drahtinnern Null gesetzt. Diese Vereinfachung erlaubt die Benutzung der Randbedingungsgleichungen aus Kapitel 7. Weitere Datenspeicher lassen sich bei Verwendung der Gleichungen II einsparen. Das Zeittaktverhältnis (9.5) wird auf die nächste ganze Zahl gerundet.

Bei der vorgesehenen geringen radialen Unterteilung im Stromverdrängungsgitter sind im Drahtinnern nur zwei Feldstärken zu berechnen. Hierzu ersetzen wir die Gleichung (9.3) durch die Rekursionsformel (8.13) bzw. (8.14). Mit u gleich der Feldstärke E und n = 1/6 lassen sich dann beide Feldstärken für die Zeitzeile j' an einem beliebigen Leitungspunkt i angeben:

$$h\cdot E_{0,i,j'} = \frac{1}{3}\cdot(h\cdot E_{1,i,j'-1} + 2h\cdot E_{0,i,j'-1}) \tag{9.8}$$

$$h\cdot E_{1,i,j'} = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(h\cdot E_{0,i,j'-1} + 8h\cdot E_{1,i,j'-1}) + h\cdot E_{a,i,j'-1}\right] .$$

Als nächstes stellen wir die Gleichung (9.1) nach $2\cdot E_a$ um und führen die übergeordnete Funktion u , Gleichung (7.3) und (7.4), ein:

$$2\cdot E_a = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L_o C_o\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{9.9}$$

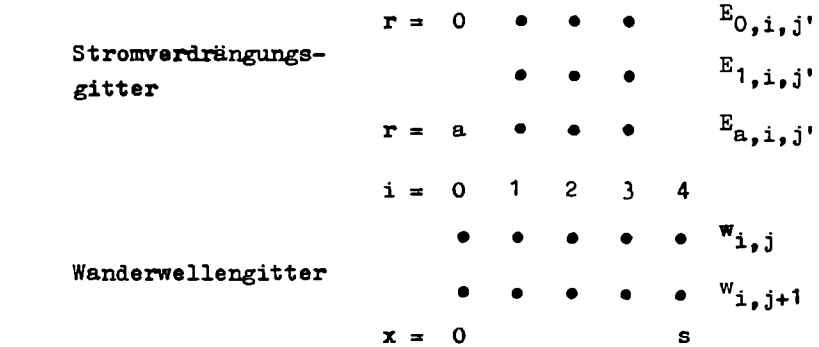
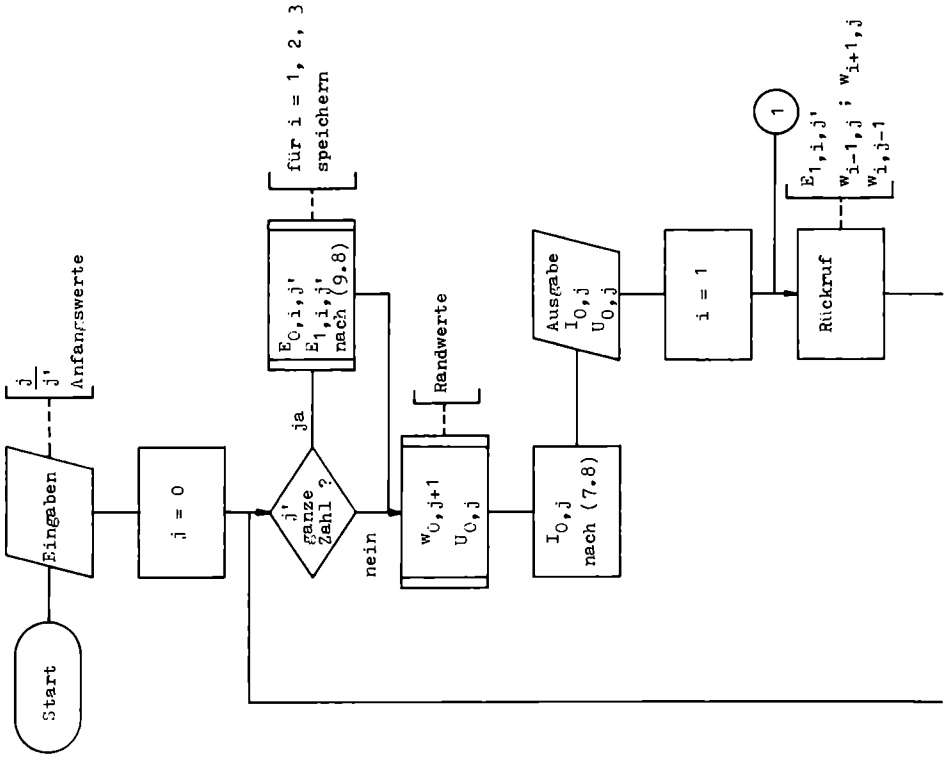


Abb. 53 Datenspeicher-Gitter für Wanderwelle mit Stromverdrängung



Nach dem Ersatz der Differentialquotienten durch Zentralformeln und der zusätzlichen Abkürzung

$$\frac{u}{2\cdot h} = w$$

geht (9.9) über in

$$h\cdot E_{a,i,j} = w_{i,j+1} + w_{i,j-1} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) \; . \qquad (9.10)$$

Anschließend wird in der Gleichung (9.4) der Strom I durch (7.8) ersetzt, das Integral über die Keplersche Faßregel nach (8.15) ausgedrückt:

$$\frac{1}{Z_o}\cdot(w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) = \frac{2}{R_o}\frac{1}{3}\cdot(2\cdot E_{1,i,j'} + E_{a,i,j'}) \; . \qquad (9.11)$$

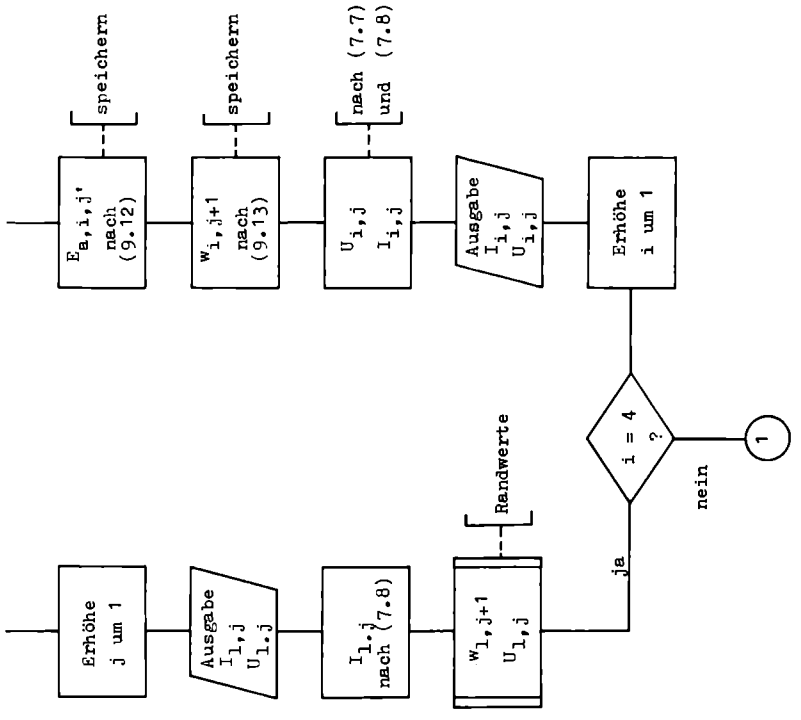


Abb. 54 Wanderwelle mit Stromverdrängung

Aus den beiden Gleichungen (9.10) und (9.11) lassen sich nun angeben:
der Randwert im Stromverdrängungsgitter an einem beliebigen Leitungspunkt i

$$(3A+1)h\cdot E_{a,i,j'} = 3A\cdot\left(2\cdot w_{i,j-1} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j})\right) + \qquad (9.12)$$

$$- 2h\cdot E_{1,i,j'}$$

und die Rekursionsformel für das Wanderwellengitter

$$(3A+1)w_{i,j+1} = w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + (3A-1)w_{i,j-1} - 2h\cdot E_{1,i,j'} \quad (9.13)$$

mit A nach (9.7) .
Nun steht der Berechnung der Spannungs- und Stromwelle nach den Gleichungen (7.7) und (7.8) aus den Werten w , wie im Kapitel 7 beschrieben, nichts mehr im Wege.

Programmablaufplan

Der Programmablaufplan (Abb.54) ist eine Erweiterung der Abb.42. Zu Beginn der Rechnung muß das Zeittaktverhältnis (9.5) als eine ganze Zahl eingegeben werden. Für die Anfangswerte sei auf Kapitel 7 verwiesen. Im Rhythmus des Zeittaktverhältnisses werden die inneren Feldstärken E_0 und E_1 in den Leitungspunkten i = 1, 2, 3 nach (9.8) neu berechnet. Der weitere Ablauf entspricht der Abb. 42 , mit Änderungen für die Randbedingungsgleichungen des Falles II. Die w- Werte zweier aufeinanderfolgender j- Zeilen müssen zwischengespeichert werden. Die Datenspeicher der Zeile j-1 dürfen erst durch die Daten der Zeile j+1 überschrieben werden.

9.2 Beispiel. Einfluß der Stromverdrängung auf das Beispiel 7.2

Das Beispiel 7.2 soll unter Berücksichtigung der Stromverdrängung gerechnet werden. Für

$$h = \frac{s}{4} \quad ; \qquad h' = \frac{a}{2}$$

ist das Zeittaktverhältnis

$$\frac{j}{j'} = 2 \quad .$$

Wir benutzen ferner die Randbedingungsgleichungen a_3 mit r = 0 und b_1 in der Form II.

Die gerechnete Spannungswelle am Anfang, Mitte und Ende der Leitung ist zum Vergleich in die Abb. 44 eingezeichnet. Die Zunahme der Dämpfung durch den erhöhten Leitungswiderstand infolge der Stromverdrängung ist nicht zu übersehen.

Die Kurven wurden auf einem HP 67 mit dem folgenden Programm gerechnet

Hauptprogramm			Ausgabe Strom, Spannung	Unterprogramm E_0 ; E_1	Unterprogramme f. die Ränder i = 0 ; i = 4	
LBL A	DSZ	LASTX	LBL 0	LBL c	LBL a	RCL 1
9	STO 7	RCL A	RC I	P⇄S	RCL 2	-
ST I	-	R↑	2	RCL(i)	RCL 2	RTN
RCL E	GSB 3	x	:	DSZ	+	
1	GSB b	LASTX	PAUSE	3	RCL D	
+	LBL 4	R↓	R↓	STO:(i)	RCL 0	LBL b
STO E	RCL(i)	+	RCL B	RCL(i)	2	RCL 9
PAUSE	ISZ	x⇄y	:	8	x	RCL 6
2	RCL(i)	P⇄S	-X-	STOx(i)	RCL C	-
:	x⇄y	ISZ	R↓	x⇄y	x	2
FRAC	STO(i)	ISZ	-X-	R↑	-	x
x = 0	x⇄y	ISZ	RTN	STO+(i)	-	0
GSB c	DSZ	RTN	LBL 3	DSZ	LASTX	GSB 0
0	SPACE	LBL 2	RC I	3	x⇄y	RTN
ST I	STO(i)	STO(i)	2	STO:(i)	RCL A	
GSB a	RC I	CL X	:	RCL(i)	RCL C	
GSB 0	DSZ	RCL A	PAUSE	STO+(i)	-	
ISZ	DSZ	1	R↓	R↑	RCL 1	
ISZ	x ≠ 0	+	RCL B	STO+(i)	x	
GSB 1	GTO 4	STOx(i)	:	R↓	+	
GSB 2	GTO A	R↓	-X-	ISZ	RCL A	
STO 3	LBL 1	DSZ	DSZ	STO+(i)	2	
-	ISZ	RCL(i)	DSZ	4	+	
GSB 3	RCL(i)	2	SPACE	STO:(i)	RCL C	
GSB 1	RCL(i)	x	RCL(i)	P⇄S	+	
ISZ	RCL(i)	ISZ	CHS	DSZ	:	
GSB 2	+	STO-(i)	x⇄I	DSZ	RCL 1	
DSZ	ISZ	-	4	GTO c	R↑	
STO 5	RCL(i)	RCL A	+	RTN	RCL 1	
-	x⇄I	2	x⇄I		R↑	
GSB 3	4	+	RCL(i)		STO 1	
GSB 1	-	STO:(i)	+		+	
ISZ	x⇄I	:	-X-		RCL C	
ISZ	RCL(i)	P⇄S	RTN		x	
GSB 2	+	DSZ			+	
DSZ	-	RTN			R↑	

Das Zeittaktverhältnis ist der Programmschritt Nr. 9. Beim Voranschreiten von der Zeitzeile j zu j+1 müssen die Datenspeicher im Wanderwellengitter umgesetzt werden. Wegen der besonderen Aufteilung der Datenspeicher auf zwei Gittersysteme erfolgt

dieses in einem Unterprogramm: Schritt Nr. 42 bis 56. Das Programm enthält gelegentlich den Leerbefehl "SPACE", um einen Sprung nach DSZ auszugleichen.

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
(3A-1)	Z_o	q	E	Zähler j	Zähler i
- 0,8755	50	1,6	10	Beginn: -1	

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb. 53

	11	14	17	
	12	15	18	
	13	16	19	
0	2	4	6	8
1	3	5	7	9

10. Membranschwingung

10.1 Problemstellung und Lösungsweg

Eine am Rande eingespannte, dünne, elastische Haut (Membran) unterliege einem einseitigen Druck. Sie wölbt sich aus, d.h. die einzelnen Membranpunkte erfahren eine Auslenkung $u(x,y)$. Wird die Membran plötzlich entlastet, so schwingt sie zurück. Der zeitliche Verlauf dieser Schwingung ist gesucht.
Die Fragestellung führt auf die in der y- Richtung erweiterte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{10.1}$$

mit Dichte ρ und Spannung der Membran σ:

$$b^2 = \frac{\rho}{\sigma} \quad \frac{s^2}{m^2} \quad .$$

<u>Beschreibung des Verfahrens</u>

Mit

$$\begin{aligned} x &= i \cdot h \\ y &= i' \cdot h \\ t &= j \cdot k \end{aligned} \tag{10.2}$$

werden die Differentialquotienten in der Gleichung (10.1) durch Zentralformeln ersetzt. Die Abmessungen der Gitterzelle h und k sollen dabei nicht unabhängig voneinander sein. Die Beziehung

$$n = \left(\frac{k}{hb}\right)^2 \tag{10.3}$$

führt auf die Rekursionsformel

$$u_{i,i',j+1} = n\cdot(u_{i+1,i',j} + u_{i-1,i',j} + u_{i,i'+1,j} + u_{i,i'-1,j}) + \\ + 2\cdot(1 - 2n)u_{i,i',j} - u_{i,i',j-1} \quad . \tag{10.4}$$

Die Rechnung ist für $(1 - 2n) \geqslant 0$ numerisch stabil. Wählt man das Gleichheitszeichen, d.h. $n = 1/2$, so vereinfacht sich die Rekursion:

$$u_{i,i',j+1} = \frac{1}{2}\cdot(u_{i+1,i',j} + u_{i-1,i',j} + u_{i,i'+1,j} + u_{i,i'-1,j}) + \\ - u_{i,i',j-1} \quad . \tag{10.5}$$

Die Lösung ist eine unharmonische Schwingung.

Programmablaufplan

Die Membran habe einen rechteckigen Querschnitt $a\cdot b$. Zu Beginn der Rechnung (Abb.55) müssen die Anfangswerte der beiden Zeitschichten $j = 0$ und $j = 1$ eingegeben werden. Wie im Kapitel 6 beschrieben, lassen sich die Werte durch "Auslenken" und "Loslassen" finden. Um die Auslenkung u der einzelnen Membranpunkte für die Zeitschicht $j = 0$ zu erhalten, setzen wir die Membran unter einem einseitigen Druck p . Die Lösung der Poissonschen Differentialgleichung für diesen Fall nach Kapitel 11 ergibt die gesuchten u- Werte. Entlasten wir die Membran zur Zeit $t = 0$, so ist die Rückschwing-Geschwindigkeit aller Punkte im ersten Moment noch Null. Dann ergeben sich, wie im Kapitel 6 beschrieben, die u- Werte der Zeitschicht $j = 1$ zu

$$u_{i,i',1} = \frac{1}{4}\cdot(u_{i+1,i',0} + u_{i-1,i',0} + u_{i,i'+1,0} + u_{i,i'-1,0}). \tag{10.6}$$

Im weiteren Rechnungsablauf sind alle Randwerte Null zu setzen, weil die Membran an den Rändern eingespannt ist. Die u- Werte zweier aufeinanderfolgender j- Schichten werden zwischengespeichert. Die Datenspeicher der Schicht j-1 dürfen dabei erst durch die Daten der Schicht j+1 überschrieben werden.

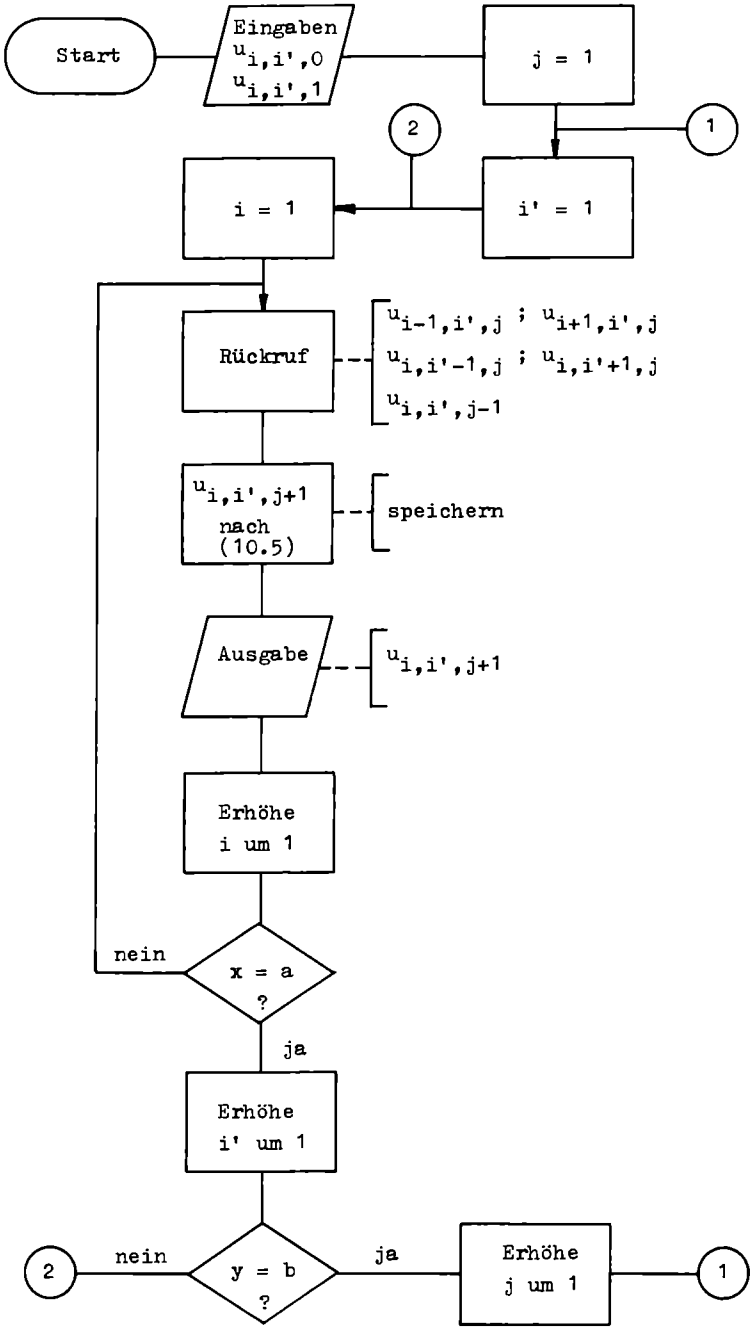


Abb. 55 Membranschwingung

10.2 Übergang auf Polarkoordinaten

Ist die Membran kreisförmig, so überführen wir die Differentialgleichung nach Abschnitt 8.2 in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = b^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad . \tag{10.7}$$

Bei gleichmäßiger Belastung der Membran bleibt u unabhängig von φ oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad .$$

Der Ersatz durch Zentralformeln führt dann mit

$$\begin{aligned} r &= i\cdot h \\ t &= j\cdot k \\ n &= \left(\frac{k}{hb}\right)^2 \end{aligned} \tag{10.8}$$

zu der neuen Rekursion

$$u_{i,j+1} = n\cdot\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{1}{2i}\cdot(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})\right] + \tag{10.9}$$
$$+ 2\cdot(1-n)u_{i,j} - u_{i,j-1} \quad .$$

Diese ist numerisch stabil für $(1-n) \geqslant 0$. Für $n = 1$ erhält man

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \frac{1}{2i}\cdot(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}. \tag{10.10}$$

Die Auslenkung u muß im Kreismittelpunkt ($i = 0$) endlich bleiben. Dazu ist

$$u_{0+1,j} - u_{0-1,j} = 0$$

erforderlich, und wir erhalten im Kreismittelpunkt die Rekursion

$$u_{0,j+1} = 2\cdot u_{1,j} - u_{0,j-1} \quad . \tag{10.11}$$

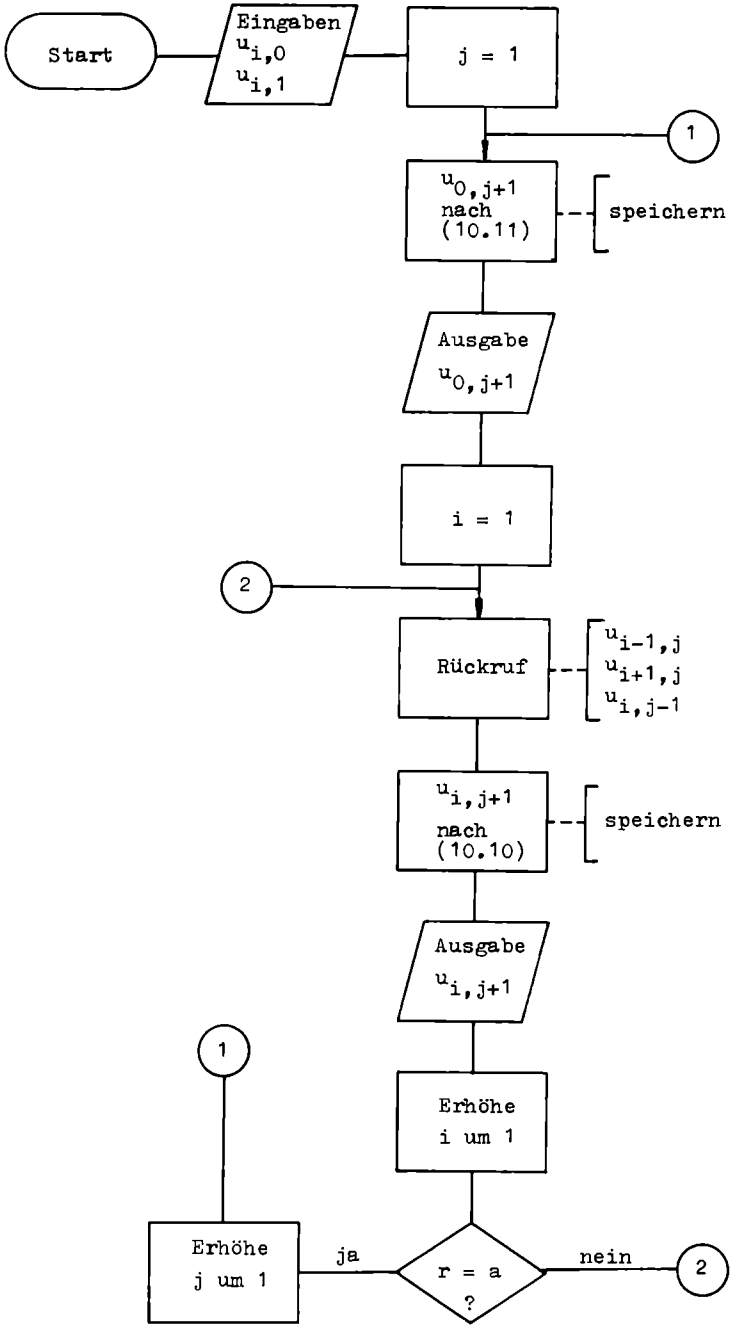


Abb. 56 Membranschwingung, Übergang auf Polarkoordinaten

Der Programmablaufplan vereinfacht sich zur Abb. 56. Bei einem gleichmäßigen Druck auf eine Membran vom Außenradius a ergeben sich die u- Werte für die Zeitzeile j = 0 zu

$$u = c\cdot(a^2 - r^2) \tag{10.12}$$

und bei plötzlicher Entlastung für die Zeitzeile j = 1

$$u_{i,1} = \frac{1}{2}\cdot\left[u_{i+1,0} + u_{i-1,0} + \frac{1}{2i}\cdot(u_{i+1,0} - u_{i-1,0})\right] \tag{10.13}$$

und im Kreismittelpunkt

$$u_{0,1} = u_{1,0} \quad . \tag{10.14}$$

10.3 Beispiel. Schwingung einer quadratischen Membran

Die Schwingung einer quadratischen Membran, Kantenlänge a = 6 cm, $b = 2{,}4\cdot10^{-3}$ s/cm , soll berechnet werden. Wir unterteilen die Kante in sechs Teile. h = 1 cm ergibt nach (10.3) für n = 1/2 $k = 1{,}7\cdot10^{-3}$ s . Eine quadratische Membran ist symmetrisch zum Achsenkreuz, so daß es genügt, die Rechnung für einen Quadranten auszuführen. Dieses erfordert neun Datenspeicher pro Zeitschicht (Abb.57). Dann müssen noch die Auslenkungen u der Zeitschichten

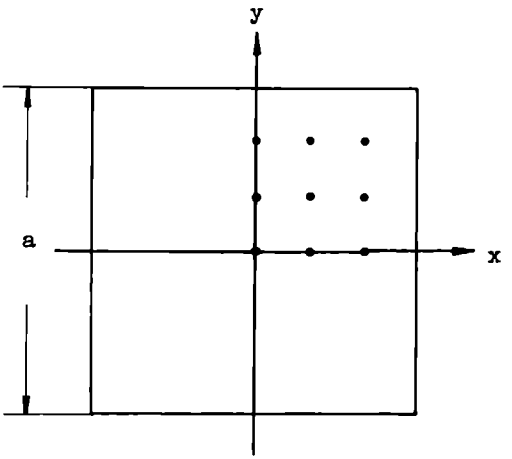


Abb. 57 Datenspeicher-Gitter bei einer quadratischen Membran

j = 0 und j = 1 bestimmt werden. Hierbei sind wir in der Wahl des Auslenkungsdruckes frei. Mit dem Wert

$$f(x,y) = -\frac{p}{d\,\sigma} = 0{,}39 \quad \frac{1}{mm}$$

und einer Genauigkeitsschranke von drei Stellen nach dem Komma ergibt das Gleichungssystem (11.4) folgende u- Werte für die Zeitschicht j = 0 in mm:

- 0,597	- 0,545	- 0,370
- 0,908	- 0,824	- 0,545
- 1,003	- 0,908	- 0,597 .

Die Entlastung nach Gleichung (10.6) liefert die u- Werte für die Zeitschicht j = 1 in mm:

- 0,499	- 0,448	- 0,272
- 0,812	- 0,727	- 0,448
- 0,908	- 0,812	- 0,499 .

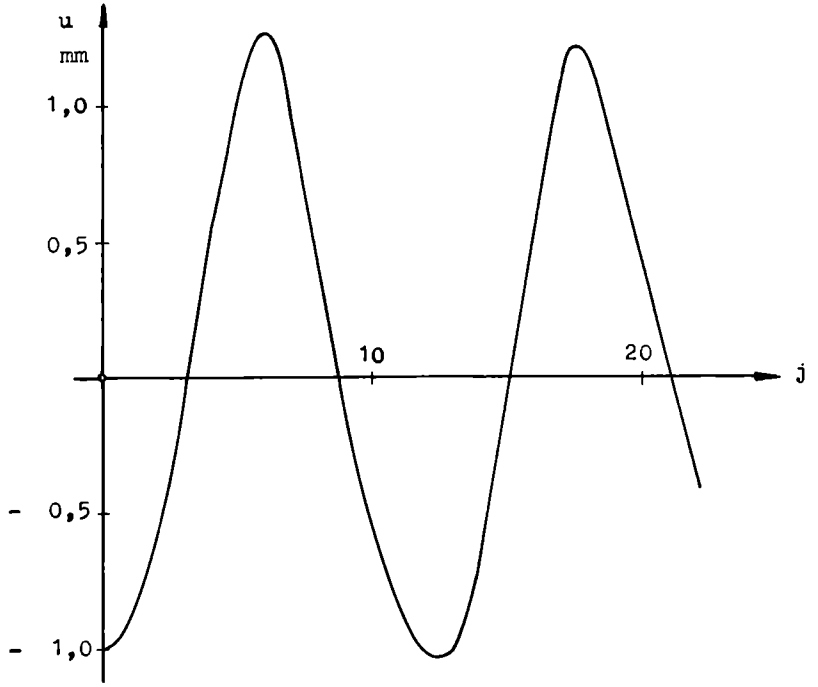


Abb. 58 Schwingung des Membranmittelpunktes

Damit kann die Schwingung nach (10.5) gerechnet werden. Das Ergebnis für den Membranmittelpunkt zeigt die Abb. 58. Als Schwingungszeit entnehmen wir $j_T = 12$ Zeitschritte und erhalten damit die Frequenz nach (6.5) zu $f = 49$ Hz .

Gerechnet wurde auf einem HP 67. Die Ausgabe im Hauptprogramm beschränkte sich auf die Werte für den Membranmittelpunkt. Es ist aber nicht ohne Reiz, auch die Schwingungen der anderen Gitterpunkte mit in die Betrachtung einzubeziehen.

Hauptprogramm		Belastung j = 0		Entlastung j = 1	
LBL A	RCL 8	LBL B	RCL 4	LBL C	RCL 9
RCL E	0	RCL 2	GSB 6	1	RCL 7
1	RCL 4	RCL 2	STO 7	1	0
+	GSB 1	+	RCL 9	ST I	RCL 5
STO E	RCL 9	RCL 4	+	RCL 2	GSB 0
PAUSE	RCL 7	RCL 4	0	RCL 2	0
1	0	GSB 6	RCL 5	RCL 4	RCL 8
ST I	RCL 5	STO 1	GSB 6	RCL 4	0
RCL 2	GSB 1	RCL 3	STO 8	GSB 0	RCL 6
RCL 2	0	+	0	RCL 3	GSB 0
RCL 4	RCL 8	RCL 5	RCL 6	RCL 1	P○S
RCL 4	0	RCL 5	GSB 6	RCL 5	RTN
GSB 1	RCL 6	GSB 6	RCL 9	RCL 5	
RCL 3	GSB 1	STO 2	x○y	GSB 0	LBL 0
RCL 1	P○S	RCL 6	STO 9	0	+
RCL 5	GTO A	RCL 6	−	RCL 2	+
RCL 5	LBL 1	GSB 6	RND	RCL 6	+
GSB 1	+	STO 3	x ≠ 0	RCL 6	4
0	+	RCL 5	GTO B	GSB 0	:
RCL 2	+	RCL 5	RTN	RCL 5	STO(i)
RCL 6	2	+		RCL 5	ISZ
RCL 6	:	RCL 7	LBL 6	RCL 7	RTN
GSB 1	P○S	RCL 1	+	RCL 1	
RCL 5	RCL(i)	GSB 6	+	GSB 0	
RCL 5	−	STO 4	RCL A	RCL 6	
RCL 7	STO(i)	RCL 6	RCL D	RCL 4	
RCL 1	GSB 2	+	x	RCL 8	
GSB 1	ISZ	RCL 8	−	RCL 2	
RCL 6	P○S	RCL 2	4	GSB 0	
RCL 4	RTN	GSB 6	:	0	
RCL 8	LBL 2	STO 5	RTN	RCL 5	
RCL 2	RC I	RCL 9		RCL 9	
GSB 1	1	RCL 3		RCL 3	
0	x ≠ y	GSB 6		GSB 0	
RCL 5	RTN	STO 6		RCL 8	
RCL 9	PAUSE	RCL 8		RCL 8	
RCL 3	RCL(i)	RCL 8		0	
GSB 1	-X-	+		RCL 4	
RCL 8	RTN	0		GSB 0	

Das Voranschreiten von j zu j+1 in den Datenspeichern erfolgt durch den Austausch der Primär- und Sekundärspeicher: P○S .

Speicherplan

A	B	C	D	E	I
	frei	frei	h	Zähler j	Zähler i,i'
0,39			1	Beginn: 1	

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb. 57.

Zeitschicht j			Zeitschicht j+1		
7	8	9	17	18	19
4	5	6	14	15	16
1	2	3	11	12	13

Der Membranmittelpunkt ist der Datenspeicher 1 bzw. 11 .

11. Poissonsche- und Potentialgleichung

11.1 Problemstellung und Lösungsweg

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in einer dünnen Platte wurde im Kapitel 8 vorgestellt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad .$$

Es wird der Platte eine Temperaturverteilung u am Rande aufgedrückt. Nach einer gewissen Zeit hat sich im Innern eine stationäre Temperaturverteilung eingestellt, die Ableitung nach der Zeit ist zu Null geworden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{11.1}$$

Die Betrachtung auch anderer stationärer Felder mit einem Potential u führt auf die Gleichung (11.1), die den Namen Potentialgleichung erhalten hat. Sie gilt aber nur, wenn im Innern der Platte keine Wärme erzeugt oder abgeführt wird. Gibt es im Innern einen Wärmefluß, so ist die rechte Seite der Gleichung nicht mehr Null:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad . \tag{11.2}$$

Die Funktion f(x,y) drückt dann den stationären Wärmefluß in den Plattenpunkten aus. Die um f(x,y) erweiterte Potentialgleichung heißt Poissonsche Differentialgleichung. Beide Gleichungen spielen in vielen Anwendungsgebieten eine fundamentale Rolle. So führt die Druckbelastung einer Membran ebenfalls auf die Glei-

chung (11.2). Mit dem Druck p, der Membrandicke d, der Spannung σ ist

$$f(x,y) = -\frac{p}{d\sigma}$$

und u(x,y) die Auslenkung der Membranpunkte.
Für eine kreisrunde Umrandung schreibt sich (11.2) in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r,\varphi) \quad . \tag{11.3}$$

Ist u unabhängig von φ, so geht die partielle in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Randwerten über.

Beschreibung des Verfahrens

Es genügt, die Poissonsche Differentialgleichung zu behandeln, weil die Potentialgleichung in ihr als Sonderfall mit f(x,y) = 0 enthalten ist. Die Differentialquotienten werden durch Zentralformeln ersetzt. Die Abmessungen der Gitterzelle h und k sollen von einander unabhängig wählbar sein. Mit

$$x = i\cdot h$$
$$y = j\cdot k$$

erhält man eine Gleichung für $u_{i,j}$ im Gitterpunkt i,j:

$$2\cdot(h^2+k^2)u_{i,j} = k^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \\ - h^2k^2f(x,y) \quad . \tag{11.4}$$

Die Abb. 59 soll diese Gleichung veranschaulichen. Der u- Wert der linken Seite ist durch einen leeren Kreis, die u- Werte der rechten Seite sind durch volle Kreise gekennzeichnet.
Schreibt man die Gleichungen für alle Gitterpunkte i,j untereinander, indem man jeweils einen anderen $u_{i,j}$- Wert auf der linken Seite hat, so ergeben sich n Gleichungen mit n Unbekannten. Die Anzahl der Gitterpunkte im Innern des Gitters ist gleich n. Die

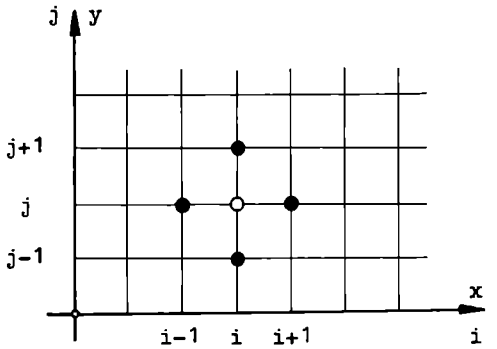


Abb. 59 Zur Gleichung (11.4)

Funktionswerte u in den Rand-Gitterpunkten und die Funktion f(x,y) sind nach Voraussetzung gegeben.
Ein solches umfangreiches Gleichungssystem läßt sich auf einem Taschenrechner nur durch ein Iterationsverfahren lösen. Wegen seines einfachen Aufbaues bietet sich das Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel an.
Auf den linken Seiten des Gleichungssystems steht jeweils eine andere Unbekannte u. Der Startwert für alle Unbekannten ist Null. Mit den vorhandenen Zahlenwerten in den Rand-Gitterpunkten werden für die einzelnen Unbekannten Näherungswerte, Gleichung hinter Gleichung, ermittelt. Hierbei sind stets die neusten Näherungswerte in die nachfolgenden Gleichungen einzusetzen. Ist man auf diesem Wege bei der letzten Gleichung des Systems angekommen, so beginnt die Rechnung mit der ersten wieder von vorne. Die Rechnung ist beendet, wenn sich, gemessen an einer Genauigkeitsschranke, die Zahlenwerte der Unbekannten nicht mehr ändern.
Eine schnelle Konvergenz dieses einfachen Iterationsverfahrens ist nicht bei jedem Gleichungssystem gewährleistet. Erforderlich sind wenige Unbekannte pro Gleichung und ein Überwiegen des Koeffizienten auf der linken Seite gegenüber denen auf der rechten. Dieses trifft bei dem vorliegenden Gleichungssystem (11.4) zu, wenn nicht zu viele Gitterpunkte weit ab vom Rande liegen. Als Maß zur Beendigung der Rechnung kann man den u- Wert der letzten Gleichung wählen. Erreicht der Unterschied aus zwei aufeinanderfolgender Iterationen

$$\Delta = (u_{i,j})_m - (u_{i,j})_{m+1} \qquad (11.5)$$

eine vorgegebene Genauigkeitsschranke, so wird die Rechnung beendet.

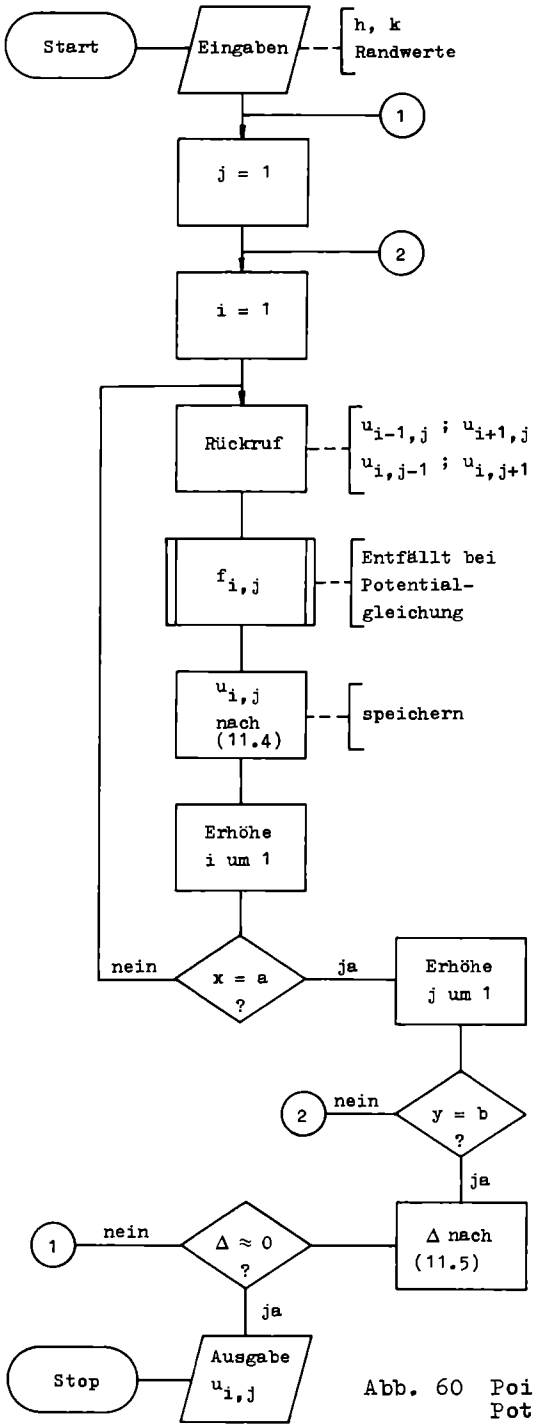


Abb. 60 Poissonsche- und Potentialgleichung

Programmablaufplan

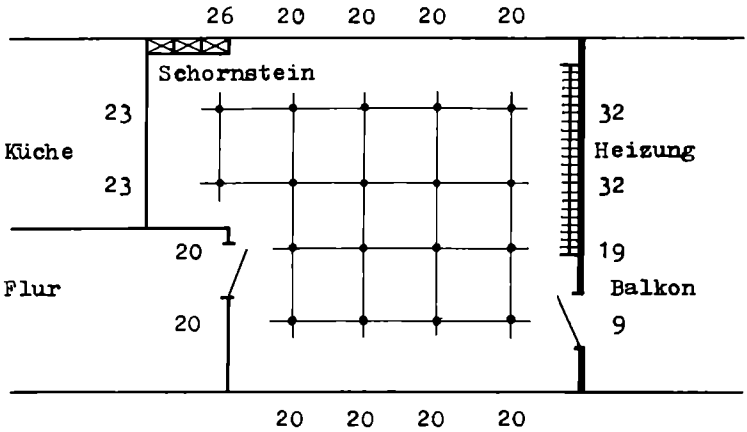
Das Gitter habe die Abmessung $a \cdot b$. Zu Beginn der Rechnung (Abb.60) werden die Werte u an den vier Rändern sowie h und k eingegeben. Bei der Poissonschen Differentialgleichung kann die Funktion $f_{i,j}$ in den einzelnen Gitterpunkten in einem Unterprogramm gerechnet werden. Bei der Potentialgleichung entfällt dieses. Während jedes Iterationsdurchlaufes überschreiben die neuen Näherungswerte sofort die alten in den entsprechenden Datenspeichern, mit Ausnahme des letzten Gitterpunktes. Hier wird zunächst der Unterschied nach (11.5) festgestellt und mit der Genauigkeitsschranke verglichen.

11.2 Beispiel. Temperaturverteilung in einem Wohnraum im Winter

Ein Beispiel für die Poissonsche Differentialgleichung war die Auswölbung einer Membran innerhalb des Beispieles 10.3. Als Beispiel für die Potentialgleichung soll der Einfluß einer dünnen Balkontür auf die Temperaturverteilung in einem geheizten Wohnraum ermittelt werden. Bekannt sind die Randtemperaturen, der niedrigste Wert an der Balkontür, der höchste an der Heizung. Auch weitere Gegebenheiten, wie Schornstein und Küche, werden in die Überlegungen einbezogen.
Das Zimmer wird mit einem Gitter aus quadratischen Zellen überzogen. Ohne die Ränder hat es 18 Punkte (Abb.61). Für $h = k$ und $f(x,y) = 0$ vereinfacht sich (11.4)

$$4 \cdot u_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} \quad .$$

Gerechnet wird das System aus 18 Gleichungen nach dem beschriebenen Iterationsverfahren mit einer Genauigkeitsschranke von zwei Stellen nach dem Komma. Das Ergebnis ist in Abb. 61 festgehalten. Die kalte Balkontür macht sich im Zimmer nur wenig bemerkbar. Dafür ist der Wärmestau in der Zimmerecke an der Heizung nicht zu übersehen. Der Einbau eines Thermostaten an dieser Stelle ist nicht empfehlenswert.



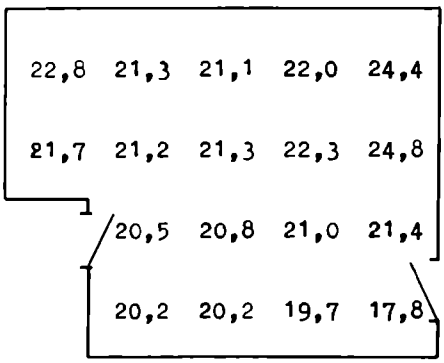


Abb. 61 Datenspeicher-Gitter und Temperaturverteilung des Beispiels 11.2

Gerechnet wurde die Temperaturverteilung auf einem HP 67 mit dem folgenden Iterationsprogramm für 18 Gleichungen mit 18 Unbekannten. Die Genauigkeitsschranke entspricht dem Anzeigeformat.

```
LBL A
RCL 2
RCL B
+
RCL A
RCL 8
GSB 1
STO 1

RCL 3
+
RCL 7
RCL A
GSB 1
STO 2

RCL 4
+
RCL 6
RCL A
GSB 1
STO 3

RCL A
+
RCL 5
RCL A
```

```
GSB 1
STO 4

P⟲S
RCL 2
P⟲S
+
RCL A
RCL 6
GSB 1
STO 5

RCL 7
+
P⟲S
RCL 1
P⟲S
RCL 3
GSB 1
STO 6

RCL 8
+
P⟲S
RCL 0
P⟲S
RCL 2
```

```
GSB 1
STO 7

RCL C
+
RCL 9
RCL 1
GSB 1
STO 8

P⟲S
RCL 8
+
RCL D
RCL 0
GSB 1
P⟲S
STO 9

P⟲S
RCL 1
+
RCL 7
P⟲S
RCL 7
P⟲S
GSB 1
```

```
STO 0

RCL 2
+
RCL 6
P⟲S
RCL 6
P⟲S
GSB 1
STO 1

RCL 3
+
RCL 5
P⟲S
RCL 5
P⟲S
GSB 1
STO 2

RCL E
+
RCL 4
RCL A
GSB 1
STO 3
```

```
RC I
+
RCL E
RCL 5
GSB 1
STO 4

RCL 6
+
RCL A
RCL 2
GSB 1
STO 5

RCL 7
+
RCL A
RCL 1
GSB 1
STO 6

RCL 8
+
RCL A
RCL 0
GSB 1
STO 7
```

```
RCL D
+
P⟲S
RCL A
RCL 9
GSB 1
P⟲S
RCL 8
x⟲y
STO 8
P⟲S
-
RND
x ≠ 0
GTO A
RTN

LBL 1
+
+
4
:
RTN
```

Speicherplan

	A	B	C	D	E	I
Randwerte	20	9	19	32	23	26

Die übrige Speichereinteilung entspricht der Abb. 61.

14	15	16	17	18
13	12	11	10	9
	5	6	7	8
	4	3	2	1

Literaturverzeichnis

Das nachfolgende Verzeichnis ist nur eine kleine Auswahl weiterführender Bücher, sowohl über numerische Verfahren als auch über Anwendungen von Differentialgleichungen. Bei der Zusammenstellung wurde darauf geachtet, daß der interessierte Leser sein Wissen ergänzen kann.

1. J. Becker, Numerische Mathematik für Ingenieure, Stuttgart 1977

2. A. Björck, G. Dahlquist, Numerische Methoden, München - Wien 1972

3. L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1963

4. L. Collatz, Differentialgleichungen, Stuttgart 1966

5. B. P. Demidowitsch, Numerische Methoden der Analysis, Berlin 1968

6. H. Selder, Einführung in die numerische Mathematik für Ingenieure, München 1973

7. G. D. Smith, Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen, Braunschweig 1970

8. E. Stiefel, Einführung in die numerische Mathematik, Stuttgart 1971

9. R. Zurmühl, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Berlin - Heidelberg - New York 1965

Stichwortverzeichnis

Ableitung, elektrische 96
Anfangsrandbedingung 43
Anfangswert 13
-, freier 51
Ankerrückwirkung 32
Anlaufkurve 35

Balken auf elastischer Unterlage 56
Bettungsziffer 56
Biegesteifigkeit 56
Bremstrommel 83

Dämpfung einer Welle 97
Decision 10
Differentialgleichung
-, gekoppelte 26, 36
-, mit Anfangswerten 13
-, mit Eigenwerten 60
-, mit Randwerten 43
-, partielle 75
Differenzenverfahren 76
Differenzenformel
-, einseitige 78
-, zentrale 77

Eigenfunktion 61
Eigenlösung 61
Eigenvektor 61
Eigenwert 60
Einschalten
-, eines Motors 32
-, einer Spule 23
Einzelschrittverfahren 140
Eisen-Magnetisierungskurve 23
Elastizitätsmodul 87
Endrandbedingung 43
Erwärmung einer Bremstrommel 82
Euler, Leonard 76

Fehlerabschätzung 19
Feldstärke, elektrische 107
Flag 47
Flußdiagramm 15
Flüssigkeitsströmung 18
Fontäne 40
Frequenz 65, 88, 136

Gauß-Seidel 140
Genauigkeitsschranke 22, 63
Gitterpunktmethode 76

Homogene Randwertaufgabe 60

Induktivität 24, 33, 96
Integral 113
Isolierfähigkeit 96
Iterationsverfahren 140

Kapazität
-, elektrische 96
-, Wärme-
Kepler, Johannes 113
Keplersche Faßregel 113
Knickung 70
Kompressionswelle 92
Kondensator 100, 102
Korrektur 21, 28

Leerbefehl 128
Leitfähigkeit
-, elektrische 107
-, Wärme- 79

Magnetisierungskurve 23
Membran
-, Druckbelastung 139
-, Schwingung 129, 134

Permeabilität 107
Poissonsche Gleichung 130
Polarkoordinaten 110, 112
Potentialgleichung 138
Programmablaufplan 15
-, Symbole 16

RAM 10
Rammbär 92
Randbedingungsgleichung 99
Randschaltung 100
Randwertaufgabe 43, 46, 53
-, homogene 60
Regula falsi 60
Rekursionsformel 77
ROM 10

Runge-Kutta-Verfahren 13
-, Fehlerabschätzung 19
-, Korrektur 21, 28
-, Schrittbemessung 22, 28
Runge-Kutta-Nyström-Verfahren 36

Saite veränderlicher Stärke 63
Sättigungsgrad 23
Schrittbemessung 22, 28
Schwingungsfrequenz 65, 88
Seil mit Schneelast 47
Selbstinduktion 107
Skineffekt 107, 120
Spannungskurve 116
Spannungswelle 98
Spule mit Eisenkern 23
Stabilität 70
-, numerische 82
Strom 109
Stromdichte 109
Stromkurve 117
Stromverdrängung 107, 120
Stromwelle 98
Subroutine 10

Telegraphengleichung 96
Temperaturverteilung in einem Wohnraum 142
Träger mit Rammbär 91
Trägheitsmoment 33

Unterprogramm 16, 18

Wanderwelle 96, 105
-, mit Stromverdrängung 120
Wärmefluß 138
Wärmekapazität 79
Wärmeleitung 79
Wärmeleitvermögen 79
Wasserspeier 38
Wellendämpfung 97
Wellengeschwindigkeit 87,97
Wellengleichung 87
Wellenwiderstand 98
Widerstand
-, Gleichstrom- 33, 96
-, Wechselstrom- 118
-, Wellen- 98

Zentralformel 77

TASCHENRECHNER

Robert M. Eisberg
Mathematische Physik für Benutzer programmierbarer Taschenrechner
1978. Ca. 200 Seiten, 49 Abbildungen, 16 Programme, Gr.-8°
Kunststoff ca. DM 30,-- ISBN 3-486-21621-X
Das amerikanische Original übersetzten Regine Eichler und Wolfgang Georgi

Aus dem Inhalt: Numerische Differentiation — Numerische Integration — Numerische Lösung von Differentialgleichungen — Oszillatoren — Bewegungsgleichungen — Zufallsprozesse — Schroedinger-Gleichung.

Differentialgleichungen als Werkzeug für die Lösung von physikalischen Problemen: dieses Buch bringt eine Reihe von ausgearbeiteten Programmen, die zeigen, wie Differentialgleichungen numerisch mit programmierbaren Taschenrechnern behandelt werden können. Jedem Abschnitt geht eine kurze Einführung in die Theorie voraus. Die Programme sind jeweils in zwei Versionen angegeben: für Rechner mit algebraischer und mit umgekehrt polnischer Notation.

Werner Sacher
Einführung in die Statistik für Benutzer programmierbarer Taschenrechner
1977. 134 Seiten, 44 Programme, 9 Tabellen, Gr. 8°
Kunststoff DM 18,80 ISBN 3-486-20761-X

Julius Schärf / Helmut Schierer / Werner Baron
Programmieren mit dem Taschenrechner SR-56
1978. Ca. 150 Seiten, 8°
Kunststoff ca. DM 19,80 ISBN 3-486-21921-9
Reihe: Fortbildung durch Selbststudium

Das Buch soll den Leser befähigen, mit Hilfe des Taschenrechners die eigenen Rechenprobleme schnell und sicher zu lösen, ohne Vorkenntnisse programmieren zu können und damit die Möglichkeiten des Taschenrechners voll auszuschöpfen.

Dieses Buch ist das erste einer Folge von Büchern über "Programmieren mit Taschenrechnern"; geplant sind Bücher über folgende Typen: TI 57, TI 58/59, HP 25, HP 29, HP 67/97.

Oldenbourg

Durch programmierbare Taschenrechner eröffnet sich dem Interessierten heute die Möglichkeit, einen reizvollen Zweig der Naturbeschreibung auch außerhalb von Rechenzentren kennenzulernen. Hierzu will das Buch Hilfestellung geben, durch das Aufzeigen der mathematischen Verfahren, mit denen auf programmierbaren Taschenrechnern das Lösen von Differentialgleichungen auf einfache Weise gelingt. Mit 18 Programmablaufplänen (Flußdiagramme) und vielen Zahlenbeispielen wird der Aufbau der verschiedenen Programme verdeutlicht.

Oldenbourg Verlag

ISBN 3-486-21791-7